CM 095 - Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

SEGUNDA PROVA - 06/11/17

- Não serão aceitas respostas sem justificativas;
- Resultados provados em sala podem ser utilizados. Você deve deixar claro onde está usando cada um destes resultados;
- A notação $\overline{A}$ indica o conjunto dos pontos aderentes ao conjunto A.

Exercício 1 *(4 pontos) Verifique quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Para as verdadeiras você deve exibir uma demonstração e para as falsas um exemplo.*

(a) Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que não é aberto é necessariamente fechado.

(b) Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ tem-se que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

(c) A interseção de uma infinidade de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.

(d) Se a série $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$ é convergente, então $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ também é convergente.

Exercício 2 *(2 pontos) Considere $\{K_j\}_{j=1}^{m}$ uma coleção de conjuntos compactos em $\mathbb{R}$. Mostre que o conjunto*

$$K = \bigcap_{j=1}^{m} K_j$$

é compacto.

Exercício 3 *(2 pontos) Determine todos os pontos de continuidade e descontinuidade da função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \;\; x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se \;\; x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Exercício 4 *(2 pontos) Suponha que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça a seguinte propriedade: existe um $M > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, então $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.