CM 095 - Análise I

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

TERCEIRA PROVA - 29/12/17

- Resultados provados em sala podem ser utilizados. Você deve deixar claro onde está usando cada um destes resultados;

Exercício 1 *(2 pontos) Verifique a validade das afirmações abaixo (se for verdadeira exiba uma prova e, caso seja falsa, um exemplo.*

(a) Uma função que é diferenciável num ponto x_0 de seu domínio é contínua neste ponto;

(b) Uma função que é contínua num ponto x_0 de seu domínio é diferenciável neste ponto;

Exercício 2 *(2 pontos) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Mostre que f só pode ser derivável em $x = 0$;

(b) Calcule $f'(0)$.

Exercício 3 *(2 pontos) Considere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e a função f definida em $\mathbb{R}$ por*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} (a_j - x)^2.$$

(a) Mostre que existe $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(b) Mostre que $x_0 = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} a_j$ é ponto de mínimo de f.

Exercício 4 *(2 pontos) Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. (Você deve usar argumentos relacionados a diferenciabilidade).*

Exercício 5 *(2 pontos) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita par se*

$$f(-x) = f(x), \quad para\ todo\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, f é dita ímpar se

$$f(-x) = -f(x), \quad para\ todo\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que se f é ímpar e derivável então, sua derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par.