Análise Funcional

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 0: Espaços Métricos e Topologia

1 Métricas

Exercício 1 *Estude os conceitos iniciais sobre espaços métricos: Sequências de Cauchy, sequências convergentes, funções contínuas, conjuntos abertos (fechados, compactos).*

Exercício 2 *Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$ um subconjunto não-vazio. Definimos a distância entre um ponto $x \in M$ e o conjunto A por*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a);\ a \in A\}.$$

(a) *Se $d(x, A) = 0$, então $x \in A$?*

(b) *Mostre que*
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y),\ \forall x, y \in M;$$

(c) *Mostre que*
$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y),\ \forall x, y, z \in M.$$
O que isso quer dizer geometricamente?

Exercício 3 *Considere o conjunto M das funções reais integráveis definidas no intervalo $[a, b]$. Dadas duas funções $f, g \in M$ ponha*
$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx. \tag{1}$$

(a) *Mostre que (4) não define uma métrica.*

(b) *Qual hipótese poderia ser adicionada as funções de M para tornar (4) uma métrica?*

(c) *Mostre que a relação*
$$f \sim g \doteq d(f, g) = 0. \tag{2}$$
é uma relação de equivalência.

(d) *Com respeito a relação definida em (3) considere o espaço quociente $N = M/\sim$. Os elementos de N são os conjuntos $[f] \subset M$, com $f \in M$, definidos por*
$$[f] = \{h \in M;\ d(f, h) = 0\}.$$
Mostre que a relação $D : N \times N \to \mathbb{R}$ dada por
$$D([f], [g]) = d(f, g),\ f \in [f] \quad e \quad g \in [g], \tag{3}$$
define uma métrica no espaço quociente $N = M/\sim$. (Não esqueça de provar que, de fato, D é uma função!)

Exercício 4 *Uma função $f : M \to N$ entre espaços métricos é dita uma imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y),\ \forall x, y \in M.$$

Uma isometria é uma imersão sobrejetiva.

(a) Mostre que uma imersão isométrica é necessariamente injetiva;

(b) Mostre que qualquer imersão isométrica define uma isometria $f : M \to f(M)$;

(c) Sejam M um espaço métrico, X um conjunto e $f : X \to M$ uma função injetiva. Mostre que a expressão

$$d_f(x, y) \doteq d_M(f(x), f(y))$$

define uma imersão isométrica

(d) Fixados $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $||u|| = 1$, mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = a+tu$ é uma imersão isométrica. (Considere uma métrica no espaço $\mathbb{R}^n$ induzido por uma norma qualquer).

(e) Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial formado pelas sequências $x = (x_1, x_2, \ldots)$ com apenas um número finito de termos $x_k \neq 0$. Defina em $\mathbb{R}^\infty$ o produto itnerno $< x, y >= \sum_j x_j y_j$. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dada por

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

é uma imersão isométrica mas não é uma isometria;

Exercício 5 *Seja $\Delta = \{(x, x);\ x \in M\}$ a diagonal do produto $M \times M$, onde M é um espaço métrico. Mostre que, se $z = (x, y) \notin \Delta$, então $d(z, \Delta) > 0$.*

Exercício 6 *Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x| = 1\}$ a esfera unitária n-dimensional. O Espaço projetivo de dimensão n é o conjunto $\mathbb{P}^n$ cujos elementos são os pares não-ordenados $[x] = \{x, -x\}$, com $x \in \mathbb{S}^n$.*

(i) Mostre que $[x] = [y]$ se, e somente se, $y = -x$.

(ii) Mostre que

$$d([x], [y]) = \min\{|x - y|, |x + y|\}$$

define uma métrica sobre $\mathbb{P}^n$;

(iii) Mostre que a aplicação natural $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, dada por $\pi(x) = [x]$, cumpre a condição

$$d(\pi(x), \pi(y)) \leqslant d(x, y).$$

Exercício 7 *Uma pseudométrica num conjunto M é uma função real $p : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que*

$$p(x, x) = 0,\ p(x, y) = p(y, x) \geqslant 0 \quad e \quad p(x, z) \leqslant p(x, y) + p(y, z),$$

para quaisquer $x, y, z \in M$.

(a) Sejam p uma pseudométrica num conjunto M e dois pontos $x, y \in M$. Mostre que a seguinte relação é de equivalência:

$$x \sim y \doteq p(x, y) = 0. \tag{4}$$

(b) *Com respeito a relação definida em (4) considere o espaço quociente $N = M/\sim$. Os elementos de N são os conjuntos $[x] \subset M$, com $x \in M$, definidos por*

$$[x] = \{t \in M;\ p(x,t) = 0\}.$$

Mostre que a expressão

$$d([x],[y]) = p(x,y),\ x \in [x] \quad e \quad y \in [y],$$

define uma métrica no espaço quociente $N = M/\sim$. (Não esqueça de provar que, de fato, d é uma função $d : N \times N \to \mathbb{R}$.)

2 Topologia

Exercício 8 *Estude os conceitos iniciais sobre topologia: Conjuntos abertos (fechados, compactos) e funções contínuas.*

Exercício 9 *Sejam X e Y dois espaços topológicos e as projeção $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$.*

(i) *Mostre que se $U \in \mathcal{T}_X$ e $V \in \mathcal{T}_Y$, então $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ and $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$;*

(ii) *mostre que ambas projeções são aplicações abertas;*

Exercício 10 *Sejam X um espaço topológico e $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma coleção de conjuntos fechados.*

(i) *Mostre que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é um conjunto fechado; O mesmo vale para a união?*

(ii) *Se Y é outro espaço topológico, mostre que uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, F fechado em Y implica $f^{-1}(F)$ fechado em X;*

Exercício 11 *Considere V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e considre $\mathcal{T}$ uma topologia em V. Dizemos que V é um espaço vetorial topológico se:*

(i) *para cada $x \in V$ o conjunto $\{x\}$ é fechado;*

(ii) *as operações $(x,y) \mapsto x + y$ e $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ são contínuas.*

Fixados $a \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, mostre que as aplicações $T_a : V \to V$ e $M_\lambda : V \to V$ dadas por

$$T_a(x) = a + x \quad e \quad M_\lambda(x) = \lambda \cdot x$$

são homeomorfismos de V sobre V.

Exercício 12 *Mostre que um espaço topológico X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal*

$$\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$$

é um subconjunto fechado de $X \times X$;

Exercício 13 *Considere $M(n)$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$.*

(a) *Obtenha uma correspondência bijetiva entre $M(n)$ e $\mathbb{R}^{n^2}$ e mostre que $M(n)$ é um espaço métrico, através desta correspondência;*

(b) *Mostre que as aplicações $\det : M(n) \to \mathbb{R}$ e $Prod : M(n) \times M(n) \to M(n)$ são contínuas;*

(c) *o conjunto $G(n)$ das matrizes $A \in M(n)$ com $\det(A) \neq 0$ é aberto;*

(d) *A aplicação $r : G(n) \to G(n)$ que a cada $A \in G(n)$ associa sua inversa A^{-1} é contínua;*

(e) *O conjunto $O(n)$ das matrizes ortogonais é compacto;*

(f) *$G(n)$ é conexo. Quais são as (duas) componentes?*

3 Continuidade

Exercício 14 *Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : M \to N$, entre espaços métricos, é homeomorfo ao domínio de f. (Siga os passos abaixo)*

(a) pondo $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in M\} \subset M \times N$ considere a função $\widehat{f}(x) = (x, f(x))$;

(b) obtenha a inversa de $\widehat{f}$;

Como aplicação, mostre que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é homeomorfo à hipérbole $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$.

Exercício 15 *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Mostre que as projeções $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ são abertas;*

Exercício 16 *Sejam M, N espaços métricos e $f, g : M \to N$ duas funções.*

(a) Se ambas são contínuas num ponto $a \in M$ e $f(a) \neq g(a)$. Mostre que existe uma bola aberta B, de centro a, tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$. Em particular, se $x \in B$ então $f(x) \neq g(x)$.

(b) Suponha que f e g são contínuas em M. Dado $a \in M$ suponha que toda bola de cetnro a contenha um ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Mostre que $f(a) = g(a)$. Usando este fato, mostre que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e $f(x) = g(x)$ para todo x racional, então $f = g$.

Exercício 17 *Um grupo metrizável é um espaço métrico G munido de uma estrutura de grupo tal que as operações*

$$m : G \times G \to G,\ m(x, y) = x \cdot y \quad e \quad f : G \to G,\ f(x) = x^{-1}$$

são contínuas. Prove as seguintes afirmações:

(a) Seja G um espaço métrico com estrutura de grupo. G é um grupo metrizável se, e somente se, a aplicação

$$q : G \times G \to G,\ q(x, y) = x \cdot y^{-1}$$

é contínua.

(b) São grupos metrizáveis: o grupo aditivo de um espaço vetorial normado (em particular $\mathbb{R}^n$), o grupo aditivo $\mathbb{S}^1$ dos complexos de módulo 1 e o grupo das matrizes reais $n \times n$ invertíveis.

(c) Sejam G e H grupos metrizáveis. Um homomorfismo $f : G \to H$ é contínuo se, e somente se, é contínuo no elementro neutro $e \in G$.

Exercício 18 *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função.*

(a) Mostre que f é contínua se, e somente se, a topologia de X é mais fina do que a induzida por f;

(b) Se f é contínua e bijetiva, então será um homeomorfismo se, e somente se, a topologia de X coincide com a induzida por f;

Exercício 19 *Sejam Y um espaço com a topologia trivial e X um espaço topológico qualquer. Mostre que qualquer função $f : X \to Y$ é contínua;*

Exercício 20 *Sejam X um espaço com a topologia discreta e Y um espaço topológico qualquer. Mostre que qualquer função $f : X \to Y$ é contínua;*

Exercício 21 *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Dizemos que f é compatível com uma relação de equivalência $\sim$ em X se $a \sim b$ implica $f(a) = f(b)$.*

(a) *Mostre que f é compatível com $\sim$ se, e somente se, f é constante sobre cada classe de equivalência determinada por $\sim$;*

(b) *Se f é compatível com $\sim$, então existe única função $\overline{f} : X/\sim \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \phi = f$, sendo $\phi : X \to X/\sim$ a aplicação quociente;*

(c) *Mostre que $\overline{f}$ é contínua;*

Exercício 22 *Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas do espaço topológico X no espaço topológico Hausdorff Y. Mostre que o conjunto*

$$F = \{x \in X;\ f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Exercício 23 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. A fronteira de um subconjunto $A \subset X$ é o conjunto*

$$\partial(A) = \overline{A} - int(A).$$

(a) *Mostre que $x \in \partial(A)$ se, e somente se, toda vizinhança de x possui pontos de A e de A^c.*

(b) *A função característica de um subconjunto $S \subset X$ é a função $\xi_S : X \to \mathbb{R}$ defeinida por*

$$\xi_S(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \notin S, \\ 1, & se \quad x \in S. \end{cases}$$

Mostre que os pontos de descontinuidade de ξ_S são aqueles pertencentes a fronteira de S.

(c) *Considere $X = \mathbb{R}$ com a topologia usual e $\mathbb{Q}$ o subconjunto dos números racionais. Quais são os pontos de descontinuidade de $\xi_{\mathbb{Q}}$?*