`Análise Funcional`
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 1: Espaços com produto interno`

Exercício 1 *Um semi-produto interno num espaço vetorial V é uma função $f : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que*

(i) $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$;

(ii) $f(\lambda u, w) = \lambda f(u,v)$;

(iii) $f(u,w) = \overline{f(v,u)}$;

(v) $f(u,u) \geqslant 0$;

(a) *Mostre que* $\mathcal{N} = \{x \in V;\ f(x,x) = 0\}$ *é um subespaço vetorial;*

(b) *Mostre que*

$$p([x],[y]) = f(x,y),\ x \in [x],\ y \in [y],$$

define um produto interno no quociente $V/\mathcal{N}$;

Exercício 2 *Considere* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência num espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. *Mostre que* $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_n \in \mathcal{H}$.

Exercício 3 *Sejam V um $\mathbb{C}$ espaço com produto interno e* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências em V. Mostre que a sequência* $\{< x_n, y_n >\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente em $\mathbb{C}$. (o mesmo vale para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)*

Exercício 4 *Mostre que se para todo z num esaço com produto iterno tem-se* $< x,z >=< y,z >$, *então $x = y$.*

Exercício 5 *Mostre que* $\|x\| = \max_{\|y\|=1} | < x,y > |$.

Exercício 6 *Sejam $\mathcal{N}$ e $\mathcal{H}$ um espaço normado qualquer e um espaço de Hilbert, respectivamente. Mostre que se existe uma transformação linear $T : \mathcal{N} \to \mathcal{H}$ isométrica e sobrejetiva, então $\mathcal{N}$ é um espaço de Hilbert.*

Exercício 7 *Verifique que a desigualdade de CBS continua válida se a condição* $< x,x >= 0 \Rightarrow x = 0$, *na definição de produto interno, for retirada.*

Exercício 8 *Mostre que, num espaço com produto interno, a condição $\|x\| = \|y\|$ implica que os vetores $x+y$ e $x-y$ são ortogonais.*

Exercício 9 *Sejam x_1, x_2, x_3 vetores num espaço com produto interno. Mostre que esses vetores formam um conjunto l.i. se, e somente se, o determinante da matriz* $[< x_i, x_j >]$ *é não nulo.*

Exercício 10 *Seja $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ uma função sobrejetiva que satisfaz* $< S(x), S(y) >=< x,y >$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$.

(a) *Mostre que S é invertível.*

(b) *Mostre que* $< S^{-1}(x), S^{-1}(y) >=< x,y >$.

(c) *Mostre que* $< S(x), y >=< x, S^{-1}(y) >$.

(d) *Conclua que* S *é linear.*

Exercício 11 *Considere* $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *uma sequência ortogonal, isto é,* $\xi_j \perp \xi_k$, $\forall j \neq k$.

(a) *Mostre a relação de Pitágoras:*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\xi_j\|^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) *Seja* $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \xi_j$ *(convergência na norma), mostre que*

$$\|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \|\xi_j\|^2.$$

Exercício 12 *Considere dois espaços* $(H_1, < \cdot, \cdot >_1)$ $(H_2, < \cdot, \cdot >_2)$ *e defina*

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >_{H_1 \times H_2} = < x_1, x_2 >_1 + < y_1, y_2 >_2$$

(a) *Mostre que* $< \cdot, \cdot >_{H_1 \times H_2}$ *define um produto interno em* $H_1 \times H_2$.

(b) *Mostre que se* H_1 *e* H_2 *são espaços de Hilbert, então* $(H_1 \times H_2, < \cdot, \cdot >_{H_1 \times H_2})$ *é Hilbert.*

Exercício 13 *Considere a seguinte função definida em* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$< z, w >_1 = z\overline{w}.$$

(a) *Mostre que* $< z, w >_1$ *define um produto interno em* $\mathbb{C}$*. Mais ainda, obtemos a métrica usual.*

(b) *Para quais condições obtemos ortogonalidade?*

Exercício 14 *Considere* $T : (V, < \cdot, \cdot >) \to (V, < \cdot, \cdot >)$ *uma transformação linear.*

(a) *Mostre que* T *é contínua sem* $x \in V$ *se, e somente se é contínua em* $x = 0$.

(b) *Se* $< Tx, x >= 0$*, para todo* $x \in V$ *então podemos garantir* $T = 0$*? Em caso de resposta negativa, adicione suponha* T *contínua e faça a mesma pertunga. (Neste caso vai fazer diferneção a escolha* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*).*

Exercício 15 *Considere um vetor* $y \in V$ *e* $\{x_n\}$ *uma sequência em* V*. Mostre que se* $x_n \perp y$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, e* $x_n \to x \in V$*, então* $x \perp y$.

Exercício 16 *Um espaço vetorial topológico sobre* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *é um espaço topológico* V *com uma estrutura de espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *tal que* $\{0\}$ *é um conjunto fechado (na topologia) tal que as operações*

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad e \quad (x, y) \mapsto x + y$$

são contínuas como funções

$$\mathbb{K} \times V \to V \ e \quad e \ \ V \times V \to V.$$

(a) *Mostre que todo espaço vetorial topológico é Hausdorff.*

(b) *Seja* V *um espaço vetorial topológico sobre* $\mathbb{C}$*. Mostre que uma aplicação linear* $f : \mathbb{C}^n \to V$ *é necessariamente contínua.*