Análise Funcional

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2: Projeções ortogonais

Definição 1 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$. Utilizaremos a notação $M \leqslant \mathcal{H}$ para indicar que M é um subespaço vetorial fechado.*

Exercício 1 *Sejam $M \leqslant \mathcal{H}$ e P_W a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M.*

(i) *Mostre que*

$$\sup_{x \in \mathcal{H};\ \|x\|=1} \|P_W x\| = 1.$$

(ii) *Mostre que $W^{\perp}$ é é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$.*

(iii) *Qual deve ser a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $W^{\perp}$?*

(iv) *Mostre que $(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

(v) *Mostre que $P_W \circ P_{W^{\perp}} = P_{W^{\perp}} \circ P_W = 0$;*

Exercício 2 *Sejam $E \leqslant \mathcal{H}$ e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é E-invariante se $T(E) \subset E$. Mostre que T é E-invariante se, e somente se, $T \circ P_E = P_E \circ T$.*

Exercício 3 *Sejam $E, F \subset \mathcal{H}$.*

(i) *Se $E \subset F$, então $F^{\perp} \subset E^{\perp}$ e $E^{\perp\perp\perp} = E^{\perp}$.*

(ii) *$E^{\perp\perp}$ é o menor subespaço vetorial fechado que contém o conjunto E. Se $E \leqslant \mathcal{H}$, então $\overline{E} = E^{\perp\perp}$.*

(iii) *$E \leqslant \mathcal{H} \Leftrightarrow E = E^{\perp\perp}$.*

Exercício 4 *Dado $A \subset \mathcal{H}$ defina os contjuntos*

$$\mathbb{A} = \bigcap_{\mathcal{A} \subset \mathcal{H}} \mathcal{A};\ \mathcal{A} \leqslant \mathcal{H} \quad e \quad A \subset \mathcal{A}.$$

e

$$Lin(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k;\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in \mathbb{K},\ v_k \in A \right\}$$

(i) *Mostre que $\mathbb{A} \leqslant \mathcal{H}$.*

(ii) *Mostre que $\mathbb{A}$ é o menor subespaço fechado de $\mathcal{H}$ que contém A.*

(iii) *Mostre que $\mathbb{A} = \overline{Lin(A)}$.*

Exercício 5 *Mostre que se A é um subespaço de $\mathcal{H}$, então $\overline{A} = \mathcal{H}$ se, e somente se, $A^{\perp} = \{0\}$. É necessária a hipótese* ***subespaço****?*