Análise Funcional

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3: Representação de Riesz

Exercício 1 *Se* $f, g \in \mathcal{H}^*$ *são tais que* $Kern(f) = Kern(g)$, *então existe* $a \neq 0$ *tal que* $f = ag$.

Exercício 2 *Considere* $\ell^2 = \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}};\ \sum_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |x_n|^2 < \infty\}$, *o qual é Hilbert considerando o produto itnerno usual de* ℓ^2.

(i) *Se* $\{\alpha_n\} \subset \ell^2$, *então* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ *converge para* $|z| \leqslant 1$;

(ii) *Mostre que se* $|\lambda| < 1$ *e* $L : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ *é definida por*

$$L(\{\alpha_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$$

obtenha $h_0 \in \mathcal{H}$ *tal que* $f(h) =< h, h_0 >$.

(iii) $||h_0|| =?$

Exercício 3 *Considere* $X = \{\{x_j\} \in \ell^2;\ x_{2j} = 0\}$.

(i) *Mostre que* X *é subespaço fechado de* ℓ^2.

(ii) *Dtermine* $X^{\perp}$.

Exercício 4 *Mostre que* $\ell^2 = (\ell^2)^*$, *isto é, existe uma isometria entre estes dois espaços (função linear, sobrejetiva que preserva norma.). (Use a representação de Riesz.) (A proposição 13.7 no livro do César faz esse resultado para* $\ell^p = (\ell^q)^*$ *com* $1/p + 1/q = 1$*)*

Exercício 5 *Se* A *é um subconjunto de* $\mathcal{H}$, *então* $A^{\perp}$ *é subespaço fechado.*