Análise Funcional

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4: Bases ortonormais e operadores contínuos

Exercício 1 *Considere a aplicação* $T : \ell^2 \to \ell^2$ *dada por*

$$T(\{x_n\}) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right).$$

Mostre que T *é contínuo mas sua imagem não é um conjunto fechado.*

Exercício 2 *Sejam* $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *a base canônica de* ℓ^2 *e* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de escalares em* $\mathbb{K}$. *Mostre que existe um operador* $A \in B(\ell^2)$ *satisfazendo*

$$Ae_j = \alpha_j e_j,\ \forall j \in \mathbb{N},$$

se, e somente se, $\sup|\alpha_j| < \infty$. *Em particular,* $\|A\| = \sup|\alpha_j|$.

Exercício 3 *Seja* $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ *uma* ***matrix infinita*** *tal que* $\alpha_{i,j} \geqslant 0$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. *Suponha ainda que existam escalares* $p_i > 0$ *e* $\alpha, \beta > 0$ *tais que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,j} p_i \leqslant \beta p_j, \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} p_j \leqslant \gamma p_i,$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. *Mostre que existe um operador* $A \in B(\ell^2)$ *satisfazendo*

$$< Ae_j, e_i >= \alpha_{i,j},\ \forall j \in \mathbb{N},$$

e que $\|A\| \leqslant \beta\gamma$.

Exercício 4 *Mostre que se* $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ *é ortonormal em* $\mathcal{H}$ *e* $T \in B(\mathcal{H})$ *é definido por*

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < x, e_j > e_j,$$

com $|\lambda_j| < 1$, *então* $(I - T)^{-1} = I + S$, *sendo*

$$Sx = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} < x, e_j > e_j.$$

Exercício 5 *Seja* $T \in B(\mathcal{H})$. *Mostre que, para todo* $t \in \mathbb{K}$, *o operador* e^{tT} *definido por*

$$e^{tT}(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{(tT)^j(x)}{j!},$$

pertence a $B(\mathcal{H})$ *e que vale* $\|e^{tT}\| \leqslant e^{|t|\|T\|}$.

Exercício 6 *Seja $T \in B(\mathcal{H})$, com $\|T\| < 1$. Mostre que o operador*

$$S(x) = \sum_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} T^j(x),$$

pertence a $B(\mathcal{H})$ e que $S = (I - T)^{-1}$.

Exercício 7 *Sejam $T, S \in B(\mathcal{H})$ com T invertível em $B(\mathcal{H})$, isto é, existe $T^{-1} \in B(\mathcal{H})$. Supondo que*

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

mostre que S é invertível. Conclua que o conjunto dos operadores invertíveis em $B(\mathcal{H})$ é aberto.