Análise Funcional

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 7: Hahn-Banach

Exercício 1 *Estude o exemplo 11.5 do livro do IMPA. (Construção de uma única extensão de Hahn-Banach em $\mathbb{R}^2$)*

Exercício 2 *Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado (não trivial) e $\mathcal{N}^*$ seu dual. Então:*

(i) *se $0 \neq \eta \in \mathcal{N}$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\eta) = \|\eta\|$ e $\|f\| = 1$.*

(ii) *se $\eta \neq \xi$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\eta) \neq f(\xi)$.*

(iii) *se $f(\eta) = 0$, para todo $f \in \mathcal{N}^*$, então $\eta = 0$.*

(iv) *se $\xi \in \mathcal{N}$, então*

$$\|\xi\| = \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|}.$$

Exercício 3 *Mostre que se $\mathcal{N}^*$ então $\mathcal{N}$ é separável.*

Exercício 4 *Seja $\mathcal{Z}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{N}$. Mostre que todo funcional linear limitado em Z é restrição de algum elemento de $\mathcal{N}^*$. Mostre que $\mathcal{Z}^* = \{f|_{\mathcal{Z}}\ ;\ f \in \mathcal{N}^*\}$.*

Exercício 5 *Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados (não triviais). Use o teorema de H-B par mostrar que se qualquer operador linear e limitado e não nulo $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é sobrejetor, então $dim(\mathcal{N}_2) = 1$.*

Exercício 6 *Seja p como no teorema de H-B complexo. Mostre que*

$$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y),\ \forall x, y \in V.$$

Exercício 7 *Mostre que se um funcional sublinear num espaço normado é contínuo em 0, então é contínuo no espaço todo.*

Exercício 8 *Se $\mathcal{N} \neq \{0\}$, então $\mathcal{N}^* \neq \{0\}$.*