Análise Funcional

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 8: Convergência Fraca e teorema da aplicação aberta

Exercício 1 *Estude a relação entre o adjunto de Banach e o adjunto de Hilbert. (seção 4.5 do Kreyszig)*

Exercício 2 *Estude a seções 4.8 e 4.9 do Kreyszig (os exercícios também). (Convergência fraca)*

Exercício 3 *Estude a seção 4.13 do Kreyszig (aplicação aberta e fechada).*

Exercício 4 *Considere uma sequência* $\{x_n\} \subset C[a,b]$ *tal que* $x_n \xrightarrow{w} x_0 \in C[a,b]$. *Mostre que* $\{x_n\}$ *converge pontualmente.*

Exercício 5 *Uma sequência* $\{x_n\} \subset \mathcal{N}$ *é dita* ***fracamente de Cauchy*** *se paraq todo* $f \in \mathcal{N}^*$ *a sequência* $\{f(x_n)\}$ *é de Cauchy.*

(i) Mostre que uma sequência fracamente de Cauchy é limitada.

(ii) Considere $A \subset \mathcal{N}$ *tal que todo subconjutno de* A *possui uma sequência fracamente de Cauchy. Mostre que* A *é limitado.*

Exercício 6 *Mostre que a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $T(x,y) = x$ *é aberta.*

Exercício 7 *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach e* $T : X \to Y$ *linear, contínuo e injetivo. Mostre que* $T^{-1} : T(X) \to X$ *é limtiado se, e somente se,* $T(X)$ *éf echado em* Y.

Exercício 8 *Considere* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma base ortonormal. Considere o operador* $P_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dado por*

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} < e_j, x > e_j.$$

Mostre que $P_n \xrightarrow{s} I$. *(Compare com o teroema no qual mostramos que* $\mathcal{B}_0(\mathcal{N},\mathcal{B})$ *é Banach. Neste caso, a convegência uniforme não pode ser substituida pela forte.)*

Exercício 9 *Sejam* $\mathcal{N}_1$ *e* $\mathcal{N}_2$ *dois espaços normados e* $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *linear e fechado.*

(i) Se T^{-1} *existe, então é fechado.*

(ii) Se $S \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, *então* $T + S$ *é fechado.*

(iii) Se $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$, *então para cada* $\lambda \in \mathbb{K}$ *temos que* $Ker(T - \lambda I)$ *é fechado.*