Equações Diferenciais:
Do Cálculo Diferencial, passando pela Álgebra Linear e chegando ao Estudo de Genes

Fernando de Ávila Silva e Geovani Nunes Grapiglia
Departamento de Matemática - UFPR

Resumo:

É comum que os estudantes de exatas (sejam eles matemáticos, físicos ou engenheiros) olhem para as disciplinas de álgebra linear, cálculo e análise numérica de forma isolada. Entretanto, muitos dos tópicos ensinados em cada uma destas disciplinas podem (e são) combinados para resolver problemas de grande relevância. Neste sentido, um dos objetivos deste mini-curso (como o título pretende indicar) é combinar tópicos do cálculo, da álgebra linear e de análise numérica para estudar problemas no campo das equações diferenciais.

Sumário

1 Introdução

2 Exponencial de Matrizes

Neste capítulo introduzimos a exponenciação de matrizes como método de resolução de sistemas de equações diferenciais lineares, a saber, sistemas do tipo

$$X'(t) = A \cdot X(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

em que $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável e A é uma matriz real de ordem n. Associado a este sistema temos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{2}$$

em que X_0 é um vetor fixado iniciamente.

Lembramos que no caso unidimensional $n = 1$, caso em que $A = a \in \mathbb{R}$, a solução deste problema é dado pela função

$$x(t) = e^{at}x_0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Observando esta última equação somos levados a tentar obter como solução da equação (1) a função

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(At) = e^{At},$$

na qual supostamente $\exp(At)$ deve ser uma matriz, para cada t, e ainda satisfazer

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A \cdot \exp(At),\ t \in \mathbb{R}.$$

Com o objetivo de obter uma definição formal para $\exp(At)$, vamos trabalhar o seguinte exemplo:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot X(t),\ X(0) = (x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

com $X(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Note que o problema (3) equivale ao sistema

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t), \\ y'(t) = by(t) \end{cases}$$

com condições iniciais $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$. Mostra-se que a (única) solução deste sistema é o par

$$x(t) = e^{at}x_0 \ \text{ e } \ y(t) = e^{bt}x_0, \tag{4}$$

donde obtemos

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} \cdot X_0,$$

Note que a expressão (4) sugere a seguinte notação: dada uma matriz diagonal $diag(a, b)$ definimos sua exponcial por

$$\exp\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}. \tag{5}$$

As seguinte propriedades podem ser obtidas através de (5):

(i) Denotando a matriz nula por $\mathbf{0}$, temos $\exp(\mathbf{0}) = I$, sendo I a matriz identidade;

(ii) Seja qual for a matriz diagonal D, segue que $\exp(D) \neq \mathbf{0}$;

(iii) Para duas matrizes diagonais D_1 e D_2 temos $\exp(D_1 + D_2) = \exp(D_1) \cdot \exp(D_2)$;

(iv) Dada uma matriz diagonal D obtêm-se

$$\frac{d}{dt}\exp(Dt) = D \cdot \exp(Dt),\ t \in \mathbb{R};$$

Note que tais propriedades são análogas àquelas que caracterizam a expoencial de números reais. Assim, podemos reeescrever (4) como

$$X(t) = \exp\begin{pmatrix} at & 0 \\ 0 & bt \end{pmatrix} \cdot X_0,$$

supondo $n = 2$.

Observe agora que uma primeira tentativa de definir a exponecial da matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ através de (5), seria expoenciar cada entrada de A, ou seja,

$$\exp\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & e^{a_{12}} \\ e^{a_{21}} & e^{a_{22}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Entretanto, este caminho não nos permitiria obter as propriedades (i) - (iv). De fato, considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por um lado temos

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix},$$

mas por outro teríamos

$$\exp(A) = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix},$$

o que faz de (6) uma tentativa não viável.

Afim de obter uma definição que atende as propriedades discutidas acima, e assim generalizando o conceito de exponencial de númereos reais, retornemos ao caso das funções reais, isto é, ao caso

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(t) = e^t.$$

É comum nos cursos de cálculo que a função exponencial seja apresentada através da representação por séries de Taylor

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots \tag{7}$$

Observe que os termos que aparecem na expansão (7) envolvel apenas as operações de potências e divisões por números, as quais estão bem definidas no espaço vetorial das matrizes quadradas. Assim, parece razoável definir a exponencial de uma matriz através de

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \ldots, \tag{8}$$

Entretanto, ressalta-se que para (8) estar bem definida, devemos investigar convergência da série e, mais ainda, queremos a diferenciabilidade da função

$$\mathbb{R} \in t \longmapsto \exp(At) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}.$$

Antes de enunciar os resultados que garantem essas propriedades, vamos investigar aguns exemplos, assumindo a convergência de (8).

Exemplo 1 (Matriz Diagonal) *Da uma matriz diagonal D, mostra-se (por indução) que*

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, logo

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1^k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n^k} \end{pmatrix}.$$

Em particular, segue que $\exp(\boldsymbol{0}) = I$.

Exemplo 2 (Matriz Nilpotente) *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que $A^3 = 0$, consequentemente $A^k = 0$ para qualquer $K \geq 3$, logo

$$e^A = I + A + \frac{A}{2} = \begin{pmatrix} 1 & a & 3b/2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3 (Matriz Diagonalizável) *Recordemos que uma matriz A de ordem n diz-se diagonalizável quando existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada pelos autoveores de A. Neste caso existe uma matriz invertível S tal que $A = SDS^{-1}$. Assim,*

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(SDS^{-1})^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{SD^kS^{-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(S\frac{D^k}{k!}S^{-1} \right) \\ &= S \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \right) S^{-1}, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} e^A = \lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left(S \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \cdot S^{-1} \right) \\ &= S \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \right) \cdot S^{-1} \ \textit{(conergência absoluta da série)} \\ &= S \cdot e^D \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo exemplo (1) *obtemos*

$$e^A = S \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1^k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n^k} \end{pmatrix} \cdot S^{-1}$$

2.1 Convergência

Mostraremos nesta seção que série da definição da exponencial de uma matriz é convergente. Para isto, utilizamos o seguinte resultado:

Proposição 1 *Seja $\{C_k\}$ é uma sequência de matrizes $m \times n$ tal que a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ é convergente. Então, a série de matrizes $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ também converge.*

Demonstração: De fato, denotando por c_{ij}^k o termo i, j de C_k, segue de $|c_{ij}^k| \leqslant \|C_k\|$ e do critério de comparação a convergência absoluta da série $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^k$. Portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ é convergente.

■

Através da proposição acima obtemos a convergência da série que define $\exp(A)$. Mais precisamente:

Teorema 1 *Para qualquer matriz $A \in \mathbb{M}(\mathbb{R}, n \times n)$ a série de matrizes*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

é convergente. Mais ainda, está bem definida a função $\varphi :\to \mathbb{M}(\mathbb{R}, n \times n)$ dada por

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

a qual é diferenciável e satisfaz a equação

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \cdot A = A \cdot \varphi(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Note que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!},$$

logo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{||A||}.$$

Assim, segue da proposição (1) a convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$.

A afirmação sobre diferenciabildiade é obtida atraqvés da derivação termo-a-termo. Enquanto que a igualdade $\varphi'(t) = \varphi(t) \cdot A$ segue do fato $A \cdot A^k = A^k \cdot A$.

■

Teorema 2 *Sejam $A_{n \times n}$ uma matriz real e $X_)$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. Então o problema*

$$\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

possui como única solução a função $X(t) = \exp(At)X_0$.

Demonstração: Note que X satisfaz a condição inicial, pois $X(0) = \exp(At)X_0 = IX_0 = X_0$. Pela teorema anterior,

$$X'(t) = A \cdot \exp(At)X_0 = X(t)$$

logo $X(t)$ é uma solução do problema.

Observe agora que $A \cdot \exp(A) = \exp(A) \cdot A$ e $\exp(-At) = \exp(At)^{-1}$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Suponha que $G(t)$ seja uma outra solução do problema e defina $\gamma(t) = \exp(-At)G(t)$. Temos que γ é uma função constante, pois $\gamma'(t) = 0$, em particular $\gamma(t) = \gamma(0) = \exp(0)G(0) = X_0$, assim $\exp(-At)G(t) = X_0$ e portanto $G(t) = \exp(-At)X_0$.

■

Vejamos agora algumas propriedades da exponencial $\exp(A)$:

Autovalores

Sejam λ uma autovalor de A e v um autvetor associado. Definindo $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ obtemos

$$\begin{aligned}
(S_n)\vec{v} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right) \vec{v} \\
&= I\vec{v} + A\vec{v} + \frac{A^2}{2}\vec{v} + \frac{A^3}{3!}\vec{v} + \ldots + \frac{A^n}{n!}\vec{v} \\
&= \lambda^0\vec{v} + \lambda\vec{v} + \frac{\lambda^2}{2}\vec{v} + \frac{\lambda^3}{3!}\vec{v} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}\vec{v} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \vec{v}
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos o resultado procurado, ou seja, $e^A\vec{v} = e^\lambda\vec{v}$. Assim, conclui-se que e^λ é um autovalor de $\exp(A)$, com autovetor v.

Existência da Inversa

Afirmamos que $\exp(A)$ é uma matriz inversível, seja A inversível ou não. De fato, uma vez que o determinante de uma matriz se expreme como produto de seus autovalores, então segue da propriedade anterior que

$$\det(\exp(A)) = e^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} \neq 0.$$

Exponencial de uma Soma

Em contraste com a propriedade $e^{x+y} = e^x e^y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, temos: dadas duas matrizes A e B de ordem n temos:

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B) \;\Leftrightarrow\; A \cdot B = B \cdot A.$$

De fato, se $e^{A+B} = e^A e^B$ então para cada $t \in \mathbb{R}$ temos $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$, então derivando essa igualdade em relação a t obtemos

$$(A + B)e^{(AB)t} = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}.$$

Derivando esta nova expressão e tomando $t = 0$ têm-se:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + AB + AB + B^2 \\ A^2 + AB + BA + B^2 &= A^2 + AB + AB + B^2 \\ AB + BA &= AB + AB \\ BA &= AB\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha $AB = BA$. Então, as funções

$$F(t) = \exp(At)\exp(Bt) \quad \text{e} \quad G(t) = \exp((A+B)t)$$

são soluções da equação $X'(t) = (A+B)X(t)$. Pela unicidade das soluções:

$$F(t) = G(t) \quad \Rightarrow \quad \exp((A+B)t) = \exp(At) \cdot \exp(Bt)$$

Tomando $t = 1$, resulta:

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

3 Classificação Planar

Neste capítulo temos como objetivo dar alguma ideias de como pode ser feito o estudo geométrico de sistemas lineares bidimensionais, sendo que tal estudo é feito basicamente sobre os autovalores da matriz do sistema.

Definição 1 *Duas matrizes quadradas A e B são distas equivalentes se existe uma matriz invertível Q satisfazendo $A = QBQ^{-1}$. Usaremos a notação $A \sim B$.*

Teorema 3 *Sejam A, B e C matrizes quadradas de mesma ordem. Então*

- *$A \sim A$;*
- *$A \sim B \Longrightarrow B \sim A$;*
- *Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$;*

Com esta notação, podemos classificar todas matrizes de ordem 2 através do teorema de Jordan:

Teorema 4 *Sejam $A_{2\times 2}$ uma matriz real e λ_1, λ_2 seus autovalores, então ocorre apenas uma das três possibilidades listadas abaixo.*

1. *Se λ_1, λ_2 são números reais distintos então*

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

2. *Se $\lambda_1 = \lambda_2$, então denotando $\lambda = \lambda_1$ temos que*

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. *Se os autovalroes são os números complexos $\lambda_1 = a + bi$ e $= \lambda_2 = a - bi$ então*

$$A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Ver [**?**] ■

Com base neste teorema só é necessário então estudar sistemas lineares bidimensionais $x' = Ax$ nos quais a matriz A é uma das obtidas no teorema.

3.1 Autovalores reais

Considerenado o caso de um sistema linear cuja matriz tenha os autovalroes λ_1, λ_2 reais e distinto basta estdar o P.V.I

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x \\ x(0) = (k_1, k_2) \end{cases} \tag{9}$$

Vamos então estudar as seguintes possbilidades [1]:

1. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$,
2. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$,
3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Aplicando qualquer um dos métodos já apresentados a solução do problema (9) é

$$x(t) = (k_1 e^{t\lambda_1}, k_2 e^{t\lambda_2}). \tag{10}$$

(Autovalores negativos) Note que nesta situação temos que ambas as funções coordenadas da solução (10) tem limite zero quando fazemos $t \to \infty$, assim desconsiderando a forma como as curvas integrais se aproximam da origem podemos ilustrar essa situação com a figura(1). Dizemos neste caso que o sistema é **atrator**.

(Autovalores positivos) Ao contrário da situação anterior temos que as funções coordenadas da solução tem limite para $+\infty$ quando fazemos $t \to \infty$. A figura(2) ilustrar essa situação com. Neste caso o sistema é um **repulsor**.

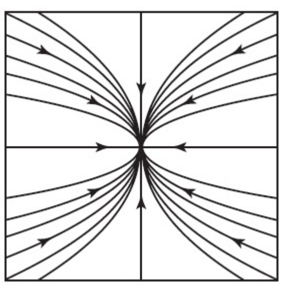

Figura 1: Atrator

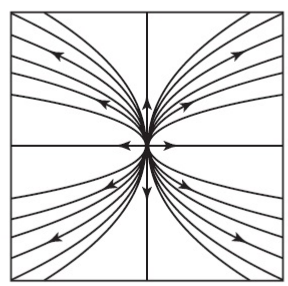

Figura 2: Repulsor

(Sinais distintos) Note que tomando condições iniciais $x(0) = (k_1, 0)$ a curva solução fica sobre o eixo horizontal, mais ainda quando fazemos $t \to \infty$ a solução tende a zero. Analogamente tomando uma condição inicial $x(0) = (0, k_2)$ a curva solução fica sobre o eixo vertical e quando $t \longrightarrow \infty$ temos a solução também tendendo para ∞. O sistema então é dito **sela**, sendo ilustrado pela figura (3).

3.2 Autovalores complexos

Pela classificação dada pelo teorema (4) devemos estudar um sistema da forma

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} x \\ x(0) = (k_1, k_2) \end{cases} \tag{11}$$

[1] O caso de autovalores identidos é deixado como exercício, sendo que a referência [?] pode ser de grande ajuda.

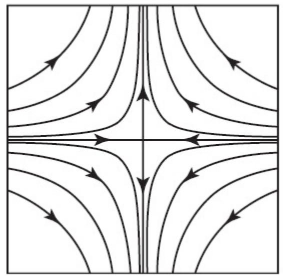

Figura 3: Sela

cuja solução é $x(t) = re^{at}(\cos b(t-\theta), -\mathrm{sen}t(t-\theta))$, sendo a e b as partes reais e imaginárias dos autovalores, respectivamente, $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{b}$.

Vamos estudar as seguintes possibildiades:

1. $a = 0$,
2. $a < 0$,
3. $a > 0$.

(Parte real nula) Nesta situação temos $a = 0$, logo a solução do sistema (11) é $x(t) = r(\cos b(t-\theta), -\mathrm{sen}t(t-\theta))$, portanto para cada condição inicial (k_1, k_2) as curvas vão descrever circunferências de raio $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, como na figura (4).

(Parte real negativa) Se $a < 0$ temos que $\lim_{t\to\infty} e^{at} = 0$, e como o $(\cos b(t-\theta), -\mathrm{sen}t(t-\theta))$ possui periodicidade a solução do sistema descreverá uma trajetória em forma de espiral em direção a origem, como exemplifica a figura (5).

(Parte real positiva) Neste caso $\lim_{t\to\infty} e^{at} = \infty$, logo teremos uma trajetória em forma espiral de sentido contrário a origem, como na figura (6).

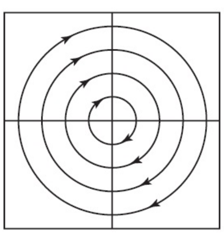

Figura 4: $a = 0$

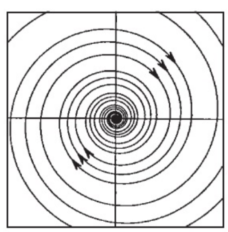

Figura 5: $a < 0$

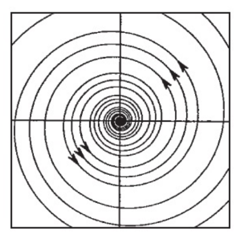

Figura 6: $a > 0$

3.3 Traço $\times$ Determinante

Dada uma matriz real

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

temos que seus autovalores são as raízes da equação $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$. Note que denotanto o traço da matriz A por T e seu determinate por D essa equação é reescrita como $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, logo suas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Note então que a discussão feita na seção anterior se resume a estudar as seguintes possibildiades:

1. $T^2 - 4D > 0$;
2. $T^2 - 4D < 0$;
3. $T^2 = 4D$.

Assim se considerarmos um plano com pontos da forma (T, D), devemos estudar a parábola $T^2 - 4D$. Sendo assim, obtemos o seguinte gráfico:

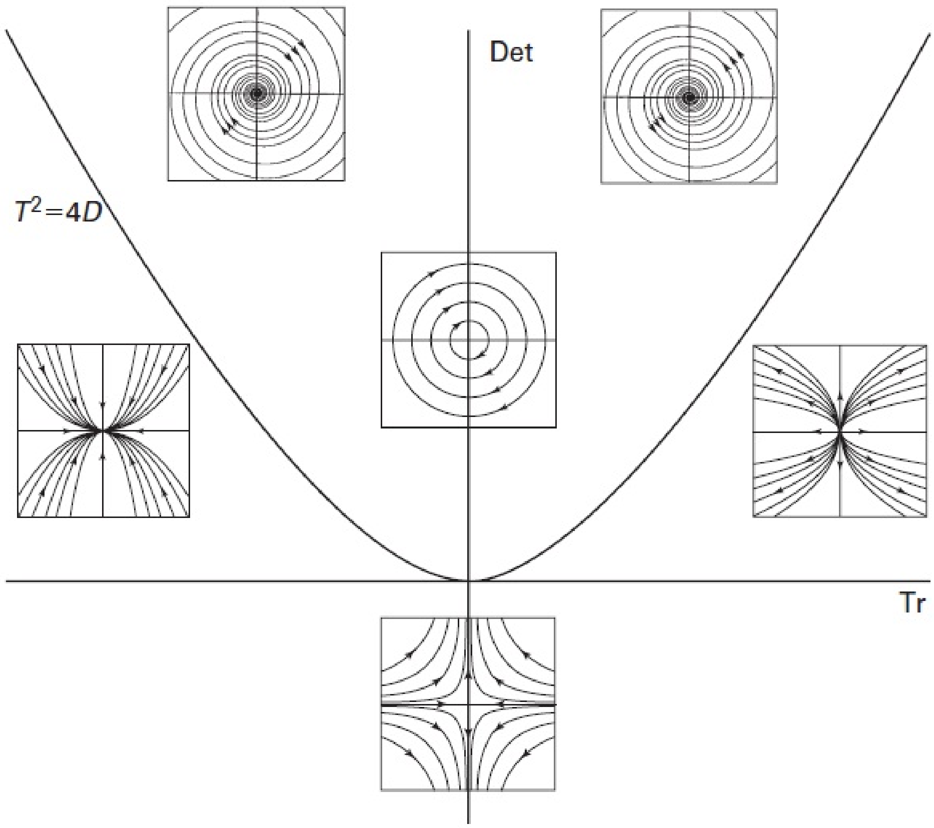

Figura 7: Plano Traço-Determinante

Referências

[1] Boyce,W.E. & DiPrima R.C.,, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, LT & C, 2002.

[2] Claus I. Doering, & Artur O. Lopes,, Equações Diferenciais Ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[3] Leon, Steven J., Álgebra Linear com Aplicações, LTC, Rio de Janeiro, 1998.

[4] Morris W. Hirsch & Stephen Smale, Differential equations, dynamical systems, and linear algebra, Academic Press, INC., London, 1974.

[5] de Hoon, M.J.L., Imoto, S., Kovbayashi, K., Ogasawara, N., Miyano, S. , Inferring Gene Regulatory Networks from Time-Ordered Gene Expression Data of Bacillus Subtilis Using Differential Equations, Pacific Symposium on Biocomputing 8:17-28, 2003.