CM 050 - Teoria Básica de Equações Diferenciais

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

Exercício 1 *Obtenha as soluções dos P.V.I.'s abaixo.*

(a)
$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = 2te^{2t}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} ty'(t) + 2y(t) = t^2 - t + 1, \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} ty'(t) + 2y(t) = sen(t), \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} ty'(t) + (t+1)y(t) = t, \\ y(\ln(2)) = 1 \end{cases}$$

Exercício 2 *Estude o comportamento das soluções dos problemas*

$$\begin{cases} y'(t) - 1/2y(t) = 2cos(t), \\ y(0) = a \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2y'(t) - y(t) = e^{t/3}, \\ y(0) = b \end{cases}$$

Exercício 3 *Considere a e λ duas constantes positivas e b um número real qualquer. Mostre que toda solução da equação*

$$y'(t) + ay(t) = be^{-\lambda t}$$

converge para zero quando $t \to \infty$.

Exercício 4 *Obtenha as soluções dos P.V.I.'s abaixo.*

(a)
$$\begin{cases} y'(t) = (1-2t)y^2(t), \\ y(0) = -1/6 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y'(t) = 2t/(y(t) + t^2 y(t), \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y'(t) = (3t^2 - e^t)/(2y(t) - 5), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} y'(t) = (e^{-t} - e\ t)/(3 + y(t)), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercício 5 *Rresolva a equação*

$$y'(t) = \frac{ay(t) + b}{cy(t) + d},$$

em que a, b, c, d são constantes.

Exercício 6 *Sejam $y_1(t)$ uma solução de $y'(t) + p(t)y(t) = 0$ e $y_2(t)$ uma solução de*

$$y'(t) + p(t)y(t) = g(t). \tag{1}$$

Mostre que $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução de (1).

Exercício 7 *Considere a equação (de Bernoulli)*

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)y^n(t), \ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

(a) Resolva a equação (2) para os casos $n = 0$ e $n = 1$.

(b) Considere $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Faça a mudança $u(t) = y^{1-n}(t)$ e mostre que a equação (2) se tranforma numa linear.

(c) Aplique a ideia acima para resolver a equação

$$t^2y'(t) + 2ty(t) - y^3(t) = 0, \ t > 0.$$

Exercício 8 *Resolva o problema*

$$y'(t) + 2y(t) = g(t), \ y(0) = 0,$$

em que

$$g(t) = \begin{cases} 1, \ 0 \leq t \leq 1, \\ 0, \ t > 0. \end{cases}$$

(É possível obter uma solução comntínua em $t = 1$?)