CM 050 - Teoria Básica de Equações Diferenciais

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2

Exercício 1 *Obtenha as soluções dos P.V.I.'s abaixo.*

(a)
$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0, \\ y(0) = 2, \; y'(0) = -1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, \\ y(\pi/4) = 2, \; y'(\pi/4) = -2 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} 9y''(t) - 12y'(t) + 4y(t) = 0, \\ y(0) = 2, \; y'(0) = -1 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0, \\ y(-1) = 2, \; y'(-1) = 1 \end{cases}$$

Exercício 2 *Resolva a equação*

$$t^2 y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0, \; t > 0.$$

Exercício 3 *Considere o probelma*

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 6y(t) = 0, \\ y(0) = 2, \; y'(0) = \alpha \geq 0 \end{cases}$$

(a) Obtenha a solução desse problema.

(b) Obtenha α de modo que $y(1) = 0$.

(c) Considerando y a resposta do item (c), o que acontece quando $\alpha \to \infty$?

Exercício 4 *Obtenha o maior intervalo no qual os problemas abaixo possuem um única solução (não tente resolver a equação).*

(a)
$$\begin{cases} ty''(t) + 3y(t) = t, \\ y(1) = 1, \; y'(1) = 2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} (t-1)y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = sen(t), \\ y(-2) = 2, \; y'(-2) = 1 \end{cases}$$

Exercício 5 *Considere o problema*

$$\begin{cases} 4y''(t) + 12y'(t) + 9y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \; y'(1) = -4 \end{cases}$$

(a) *Resolva o probema e esboce o gráfico para* $t \in [0, 5]$.

(b) *Determine o ponto no qual a solução se anula.*

(c) *Determine as coordenadas no qual a solução atinge seu mínimo.*

(d) *Considere qua a segunda condição inicial é dada por* $y'(0) = b$. *Obtenha a solução em função de* b. *Obtenha o valor crítico de* b *que separa as soluções que permanecem positivas das que acabam se tornando negativas.*

Exercício 6 *Considere um polinômio* $p(s) = a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n$ *e o operador diferencial*

$$p(f) = a_0 f + a_1 f^{(1)} + \ldots a_n f^{(n)}$$

definido para funções analíticas.

(a) *Mostre que* p *é um operador linear.*

(a) *Prove que* $p(e^{\lambda z}) = p(\lambda)e^{\lambda z}$. *Em particular, se* $p(\lambda) = 0$, *então* $e^{\lambda z}$ *é solução da equação diferencial* $p(f) = 0$.

(c) *Mostre que* $p(zf) = zp(f) + p'(f)$. *Assim, se* λ *é uma raíz de ordem* 2 *do polinômio* p, *então* $p(z^j e^{\lambda z}) = 0$, *para cada* $j \in \{0, \ldots, k-1\}$.

(d) *Mostre que*

$$\frac{d^n}{dz^n}(p(f)) = p\left(\frac{d^n}{dz^n}(f)\right)$$

Conclua que se $p(s) = p_1(s)p_2(s)$ *(produto de dois polinômios), então*

$$p(f) = p_1(p_2(f)) = p_2(p_1(f)).$$

(e) *Suponha*

$$p(s) = (s - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (s - \lambda_n)^{k_n}$$

tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq k$, *e* $k_j \geq 1$. *Mostre que toda função da forma*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\ell=0}^{k_j - 1} c_{\ell j} z^{\ell} e^{\lambda_j z} \right) \tag{1}$$

é solução de $p(f) = 0$.

(f) *Suponha que* $p(s)$ *tem grau* ≥ 1. *Dado* $z_0 \in \mathbb{C}$, *mostre que a única solução analítica da equação* $p(f) = 0$ *que satisfaz*

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

é a função identicamente nula. Conclua que $p(f)$ *possui única solução satisfazendo*

$$f(z_0) = c_0,\ f^{(1)}(z_0) = c_1,\ \ldots f^{(m-1)}(z_0) = c_{m-1},$$

sendo c_k *constantes dadas.*

(g) *Dadas* m *funções analítcas* $f_1, \ldots, f_m$ *defina*

$$W(z) = \det \doteq \begin{bmatrix} f_1(z) & \ldots & f_m(z) \\ f_2^{(1)}(z) & \ldots & f_2^{(1)}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(z) & \ldots & f_m^{(m-1)}(z) \end{bmatrix}$$

Mostre que se $f_1, \ldots, f_m$ *são soluções de* $p(f) = 0$, *então*

$$W(z) = e^{-a_{m-1}(z-z_0)} W(z_0).$$

(h) *Sejam* p *e* $f_1, \ldots, f_m$ *como acima. Suponha* $W(z_0) \neq 0$. *Prove que, dados* c_0, c_1, c_{m-1}, *existe única solução da equação* $p(f) = 0$ *da forma*

$$f = b_1 f_1 + \ldots b_m f_m$$

tal que

$$f(z_0) = c_0,\ f^{(1)}(z_0) = c_1,\ \ldots f^{(m-1)}(z_0) = c_{m-1}.$$

(i) *Suponha*

$$p(s) = (s - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (s - \lambda_n)^{k_n}$$

tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq k$, *e* $k_j \geq 1$. *Prove que as soluções de* $p(f) = 0$ *são da forma* (1).