CM 050 - Teoria Básica de Equações Diferenciais

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA - SISTEMAS - I

Exercício 1 *Se $Y_1, \ldots, Y_k$ são soluções de um sistema $x'(t) = Ax(t)$, então $\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_k Y_k$ é solução deste mesmo sistema, para quaisquer escalares α_j.*

Exercício 2 *Mostre que conjunto das soluções do sistema homogêneo $x'(t) = Ax(t)$ é um espaço vetorial de dimensão n.*

Exercício 3 *Demosntre os seguintes resultados:*

(a) $Ae^A = e^A A$;

(b) *se $AB = BA$, então $Be^A = e^A B$;*

(c) *Se λ é autovalor de A, então e^λ é um autovalor de e^A.*

(d) *A matriz inversa de e^{tA} é e^{-tA}, para cada $t \in \mathbb{R}$. Conclua que exponencial de uma matriz é sempre uma matriz invertível.*

Exercício 4 *Obtenha e^A, sendo A uma matriz nilpotente, isto é, se existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.*
Dica: comece com um exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 5

Exercício 6 *Suponha $A_{n\times n}$ uma matriz real que possui um autovalor real $\lambda < 0$. Mostre que a equação $x' = Ax$ possui pelo menos uma solução não trivial $x(t)$ tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.*

Exercício 7 *Utilizando o método dos autovalores e autovetores determine a solução do seguinte sistema:*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 8y_1 + y_2 \end{cases}$$

Exercício 8 *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz real diagonalizável com n autovalores distintos. Obtenha condições sobre os autovalroes de A tais que a solução $x(t)$ de $x' = Ax$ satisfaça uma das duas condições:*

(a) $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$;

(b) $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$.

Exercício 9 *Sejam $A_{n\times n}$ uma matriz real e p um vetor em $\mathbb{R}^n$. Então o problema*

$$\begin{cases} F'(t) = AF(t), \\ F(0) = p, \end{cases}$$

possui como única solução a função $F(t) = e^{At}p$.

Exercício 10 *Reescreva as equações abaixo na forma de sistemas e obtenha as soluções.*

(a)

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0, \\ y(0) = 2, \ y'(0) = -1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, \\ y(\pi/4) = 2, \ y'(\pi/4) = -2 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} 9y''(t) - 12y'(t) + 4y(t) = 0, \\ y(0) = 2, \ y'(0) = -1 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0, \\ y(-1) = 2, \ y'(-1) = 1 \end{cases}$$