CM 050 - Teoria Básica de Equações Diferenciais

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA - SISTEMAS - II

RESOLVA TODOS OS EXERCÍCIOS ANEXADOS

e vertical $p = 0$ (traço nulo). O primeiro quadrante aberto desse plano coordenado $(p, q > 0)$ representa o movimento amortecido dos casos A2, A3 e A4, em que o movimento criticamente amortecido é dado pela metade $p > 0$ da parábola $q = \frac{1}{4}p^2$ (discriminante nulo). O movimento não-amortecido é dado pelo semi-eixo vertical superior $p = 0, q > 0$. Observe que as selas do caso B3 ocupam todo o semiplano inferior.

Observando o primeiro quadrante $p \geq 0, q > 0$, também faz perfeito sentido afirmar que, dentro da família (1.9) referente ao sistema mola-partícula, os casos A2 e A4 são *genéricos* — no sentido de que, dados aleatoriamente a constante de elasticidade e o coeficiente de atrito, a probabilidade é nula de não ocorrer ou o caso A2 ou o caso A4 — e *estruturalmente estáveis* — no sentido que pequenas perturbações de p e q não afetam o tipo topológico do retrato de fase. Também é visível que os casos A1 e A3 são estruturalmente instáveis e não são genéricos. $\Diamond$

1.5 Exercícios

Para facilitar a referência ao contexto, em alguns exercícios indicamos a página em que são comentados pela primeira vez.

(1) Mostre que $x(t) \equiv 0$ é sempre solução de (1.1) e que se $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são soluções de $x' = Ax$, então também $s_1(t) + cs_2(t)$ é solução de $x' = Ax$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$. [p. 18]

(2) Seja $A \in M(n)$ e denote por $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as soluções da equação vetorial $x' = Ax$. Defina $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ por $T(x) = x(0)$ e, usando a linearidade da equação e o teorema de existência e unicidade, mostre que T é uma transformação linear, sobrejetora e injetora, ou seja, um isomorfismo linear. Conclua que $\dim \mathcal{S} = n$. [p. 18]

(3) Sejam $A \in M(n)$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $s_1, s_2, \ldots, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ as soluções de $x' = Ax$ tais que $s_i(0) = v_i$, com $1 \leq i \leq n$. Mostre que $s_1, s_2, \ldots, s_n$ são linearmente independentes no espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ das funções e que qualquer solução de $x' = Ax$ é combinação linear de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. [p. 26]

(4) Se $v \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor da matriz $A \in M(n)$ e $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de $x' = Ax$ tal que $x(t^*) \in [v] = \{av \in \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\}$ para algum $t^* \in \mathbb{R}$, mostre que $x(t) \in [v]$ para cada $t \in \mathbb{R}$. [p. 27]

(5) Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ matrizes reais de tamanhos $n \times \ell$, $\ell \times m$, e $n \times m$, respectivamente. O produto de matrizes é definido por $A \cdot B = C$ se, e somente se, $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ para quaisquer $1 \leq i \leq n$

adrante aberto desse plano
;o amortecido dos casos A2,
ımortecido é dado pela me-
ıante nulo). O movimento
:al superior $p = 0, q > 0$.
o o semiplano inferior.
$q > 0$, também faz perfeito
referente ao sistema mola-
no sentido de que, dados
o coeficiente de atrito, a
so A2 ou o caso A4 — e
ıuenas perturbações de p e
ıse. Também é visível que
s e não são genéricos. $\diamondsuit$

ns exercícios indicamos a
ez.

) e que se $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são
$s_2(t)$ é solução de $x' = A\,x$,

spaço de todas as soluções
$\to \mathbb{R}^n$ por $T(x) = x(0)$ e,
de existência e unicidade,
ejetora e injetora, ou seja,
[p. 18]

e $s_1, s_2, \ldots, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
n $1 \leq i \leq n$. Mostre que
espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$
é combinação linear de

) e $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma
$\mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\}$ para algum
. 27]

ais de tamanhos $n \times \ell$,
natrizes é definido por
a quaisquer $1 \leq i \leq n$

e $1 \leq j \leq m$. Assim definimos o produto de matrizes quadradas e o produto de uma matriz quadrada com um vetor-coluna utilizados no texto, onde quase sempre omitimos o ponto que indica o produto. O produto é associativo e distributivo em relação à soma de matrizes mas *não* é comutativo. Dê um exemplo de matrizes $A, B \in M(2)$ tais que $A\,B \neq B\,A$. [p. 21]

(6) Sejam $B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M(n)$ e $1 \leq i, j \leq n$ dados e seja $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Mostre que o produto $B\,e_j = B_j$ é a j-ésima coluna de B e que $e_i\,C = C_i$ é a i-ésima linha de C. Mostre que a j-ésima coluna do produto $C\,B$ é dada por $(C\,B)_j = \sum_\ell b_{\ell j} C_\ell$ e que a i-ésima linha de $C\,B$ é dada por $(C\,B)_i = \sum_\ell c_{i\ell} B_\ell$. [p. 22]

(7) Mostre que se $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é um autovetor de $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{smallmatrix}\right) \in M(2)$ então $x_1 = 0$. Em particular, mostre que A não possui dois autovetores linearmente independentes e que, portanto, não é diagonalizável. [p. 28]

(8) Sejam $A, B, Q \in M(n)$ tais que $A\,Q = Q\,B$, com Q invertível, $v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ dados. Mostre que [p. 27]:
  (a) v é autovetor de B associado ao autovalor λ se, e somente se, $Q\,v$ é autovetor de A associado ao autovalor λ;
  (b) Se $[v]$ é a reta invariante gerada pelo autovetor v de B então a imagem $Q\,[v]$ de $[v]$ por Q é a reta invariante gerada pelo autovetor $Q\,v$ de A, isto é, $Q\,[v] = [Q\,v]$;
  (c) mostre que $Q\,\mathrm{Nuc}(B) = \mathrm{Nuc}(A)$, de modo que os núcleos de matrizes linearmente conjugadas são subespaços isomorfos;
  (d) $(\lambda I - A)\,Q = Q\,(\lambda I - B)$;
  (e) λ é autovalor de A se, e somente se, λ é autovalor de B, ou seja, matrizes linearmente conjugadas têm os mesmos autovalores;
  (f) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ é um auto-espaço de B se, e somente se, $Q\,W$ é um auto-espaço de A, ou seja, os auto-espaços de matrizes linearmente conjugadas são isomorfos, dois a dois, pela conjugação.

(9) Sejam $A, B, Q \in M(n)$ tais que $A\,Q = Q\,B$, com Q invertível, e $\lambda \in \mathbb{R}$ dados. Mostre que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ [p. 80]:
  (a) $(\lambda I - A)^k\,Q = Q\,(\lambda I - B)^k$;
  (b) $\dim \mathrm{Nuc}((\lambda I - A)^k) = \dim \mathrm{Nuc}((\lambda I - B)^k)$.

7 (10) Sejam $A \in M(n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ e denote $V_\lambda = \mathrm{Nuc}(\lambda I - A) \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que:
  (a) V_λ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$;
  (b) se $x \in V_\lambda$ então $A\,x \in V_\lambda$, ou seja, $A(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$;
  (c) se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de $x' = A\,x$ tal que $x(t^*) \in V_\lambda$ para algum $t^* \in \mathbb{R}$, então $x(t) \in V_\lambda$ para cada $t \in \mathbb{R}$, ou seja, V_λ é invariante pela ação da matriz A. [p. 29]

(11) O *traço* $\operatorname{tr} A$ de uma matriz $A = (a_{ij}) \in M(n)$ é a soma dos elementos de sua diagonal principal: $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii} \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (*Sugestão*: ver Exercício 6.);

(b) se $A \sim B$ então $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

Assim, o traço de uma matriz é um invariante da classe de conjugação da matriz, ou seja, matrizes semelhantes têm mesmo traço, exatamente como ocorre com determinantes. A propriedade que garante a invariância de determinantes, é $\det(AB) = \det A \det B$, um pouco mais difícil de mostrar do que (a). [p. 31]

(12) Encontre a solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ da equação diferencial linear em $\mathbb{R}^2$ com as condições iniciais dadas.

(a) $x_1' = -x_1,\ x_2' = x_1 + 2x_2;\quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 3.$

(b) $x_1' = 2x_1 + x_2,\ x_2' = x_1 + x_2;\quad x_1(1) = 1,\ x_2(1) = 1.$

(c) $x' = Ax,\ x(0) = (3, 0),$ onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

(13) Seja $A = \begin{pmatrix} -\mu_0 & \lambda_0 \\ \mu_0 & -\lambda_0 \end{pmatrix} \in M(2)$ e escreva

$$\sigma_0 = \lambda_0 + \mu_0,\ \lambda = \tfrac{\lambda_0}{\sigma_0} \quad \text{e} \quad \mu = \tfrac{\mu_0}{\sigma_0}.$$

Mostre que [p. 127]:

(a) o polinômio característico da matriz A é $p_A(\xi) = \xi^2 + \sigma_0\,\xi$;

(b) 0 e $-\sigma_0$ são os autovalores de A;

(c) (λ, μ) é um autovetor de A associado ao autovalor 0 e que

(d) $(1, -1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $-\sigma_0$.

Observe que $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$ e conclua que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \mu & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(14) Encontre uma matriz A de tamanho 2×2 tal que

$$x(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + 2e^{-t})$$

seja uma solução da equação $x' = Ax$.

(15) Suponha que $A \in M(n)$ tem um autovalor real $\lambda < 0$. Mostre que a equação $x' = Ax$ tem pelo menos uma solução $x(t)$ não-trivial tal que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(16) Seja $A \in M(n)$ uma m
nha condições sobre os
da equação diferencial
$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$ ou (

(17) Mostre que todas as sol
$t \to +\infty$, no caso em q
entradas na diagonal de
é diagonalizável e todos

(18) Calcule os autovetores e
a solução geral do sister

(19) Sejam $A \in M(n)$ uma m
λ é um autovalor genera
generalizado de cA. [p.

(20) Dizemos que uma soluç
tal que $x(T) = x(0)$, m
denominado o *período*
Seja $A \in M(2)$ e su
de período $T > 0$. Most
solução de $x' = Ax$ é tr

(21) Seja $A \in M(2)$. Para ca
como a curva parametri
$\mathcal{O}($
do plano definida pela
$x(0) = x_0$. Mostre que
disjuntas e conclua que
Acrescidos dos sentidos
partição de plano como

(22) Considere o campo line
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $x($
inicial $x(0) = (k_1, k_2)$
permanece no eixo x_2, q
suponha que $k_1 \neq 0$. Est
$\lim_{t\to\pm\infty}$
mostre que [p. 47]:

: $M(n)$ é a soma dos elementos
: $\mathbb{R}$. Mostre que:

xercício 6.);

riante da classe de conjugação
têm mesmo traço, exatamente
iedade que garante a invariância
ct B, um pouco mais difícil do

la equação diferencial linear em

$= 0$, $x_2(0) = 3$.
$1) = 1$, $x_2(1) = 1$.
$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

e $\mu = \frac{\mu_0}{\sigma_0}$.

: A é $p_A(\xi) = \xi^2 + \sigma_0\,\xi$;

o ao autovalor 0 e que
do ao autovalor $-\sigma_0$.

conclua que

$) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$.

2 tal que

$^{t} + 2e^{-t})$

lor real $\lambda < 0$. Mostre que a
olução $x(t)$ não-trivial tal que

(16) Seja $A \in M(n)$ uma matriz com n autovalores reais distintos. Obtenha condições sobre os autovalores de A para que cada solução $x(t)$ da equação diferencial $x' = A\,x$ satisfaça uma das duas condições: (a) $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$ ou (b) $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \infty$.

(17) Mostre que todas as soluções $x(t)$ de $x' = A\,x$ tendem a $0 \in \mathbb{R}^n$ quando $t \to +\infty$, no caso em que $A \in M(n)$ é uma matriz diagonal e todas as entradas na diagonal de A são negativas. Mostre que o mesmo vale se A é diagonalizável e todos os autovalores de A são negativos.

(18) Calcule os autovetores e autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e obtenha a solução geral do sistema $x' = Ax$.

(19) Sejam $A \in M(n)$ uma matriz qualquer e $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \neq 0$. Mostre que λ é um autovalor generalizado de A se, e somente se, $c\lambda$ é um autovalor generalizado de cA. [p. 95]

(20) Dizemos que uma solução $x(t)$ de $x' = A\,x$ é ***periódica*** se existir $T > 0$ tal que $x(T) = x(0)$, mas $x(t) \neq x(0)$ para $0 < t < T$; nesse caso, T é denominado o ***período*** da solução.

Seja $A \in M(2)$ e suponha que $x' = A\,x$ tem uma solução periódica de período $T > 0$. Mostre que A não tem autovalores reais e que toda solução de $x' = A\,x$ é trivial ou periódica com o mesmo período T.

(21) Seja $A \in M(2)$. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^2$, defina a *órbita* de $x' = A\,x$ por x_0 como a curva parametrizada

$$\mathcal{O}(x_0) = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

do plano definida pela solução $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de $x' = A\,x$, $x(0) = x_0$. Mostre que duas órbitas $\mathcal{O}(x^*)$ e $\mathcal{O}(x^{**})$ são ou iguais ou disjuntas e conclua que o plano é particionado em órbitas de $x' = A\,x$. Acrescidos dos sentidos de percurso de cada órbita, interpretamos essa partição de plano como o *retrato de fase* da equação $x' = A\,x$. [p. 47]

(22) Considere o campo linear $x' = A\,x$ com $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ e a solução $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, k_2 e^{\lambda_2 t})$, de condição inicial $x(0) = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$. É claro que se $k_1 = 0$, $x(t) = (0, x_2(t))$ permanece no eixo x_2, que é a reta invariante do autovetor e_2 e, por isso, suponha que $k_1 \neq 0$. Estudando

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{|x_2(t)|}{|x_1(t)|} = \frac{|k_2|}{|k_1|} \lim_{t\to\pm\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t},$$

mostre que [p. 47]:

(a) se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, a solução $x(t)$ é assintoticamente tangente ao eixo x_2 quando tende à origem com $t \to +\infty$; dizemos que a origem é um ***nó estável***;

(b) se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, a solução $x(t)$ é assintoticamente tangente ao eixo x_1 quando tende à origem com $t \to -\infty$; dizemos que a origem é um ***nó instável***.

(23) Considere o campo linear $x' = A\,x$ com $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ e a solução $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (k_1 e^{\lambda t}, [k_1 t + k_2] e^{\lambda t})$, de condição inicial $x(0) = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$. É claro que se $k_1 = 0$, $x(t) = (0, x_2(t))$ permanece no eixo x_2, que é a reta invariante do autovetor e_2 e, por isso, suponha que $k_1 \neq 0$. Estudando, como no Exercício 22 o limite de $|x_2(t)|/|x_1(t)|$ com $t \to \pm\infty$, mostre que [p. 51]:

(a) se $\lambda < 0$, a solução $x(t)$ é assintoticamente tangente ao eixo x_2 quando tende à origem com $t \to +\infty$; dizemos que a origem é um ***nó impróprio estável***;

(b) se $0 < \lambda$, a solução $x(t)$ é assintoticamente tangente ao eixo x_2 quando tende à origem com $t \to -\infty$; dizemos que a origem é um ***nó impróprio instável***.

(c) o retrato de fase nesses casos impróprios é o "limite" dos respectivos retratos de fase dos casos do Exercício 22 quando $\lambda_2 \to \lambda_1 = \lambda$ sem trocar de sinal e os auto-espaço associados colapsam num só subespaço invariante.

(24) Considere $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ e a solução $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ da equação $x' = A\,x$ dada por $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = r\,e^{at}\big(\cos b(t-\theta), -\operatorname{sen} b(t-\theta)\big)$ de condição inicial $x(0) = (r\cos b\theta, r \operatorname{sen} b\theta) \in \mathbb{R}^2$. [p. 52]

(a) Verifique a orientação da curva parametrizada percorrida pela solução $x(t)$ usando o valor de A calculado em algum ponto, por exemplo, $e_1 = (1,0)$, no qual $A\,e_1 = (a,b)$ é o vetor tangente à solução que passa por $(1,0)$.

(b) Verifique a orientação das curvas esboçadas nos retratos de fase das Figuras 1.4 a), 1.4 b) e 1.5.

(c) Sendo $a = 0$, mostre que a curva parametrizada definida pela solução $x(t)$ é uma circunferência de centro na origem e raio r.

(25) Seja A uma matriz 2×2 com autovalores reais λ_1 e λ_2 e autovetores associados $(1,0)$ e $(1,1)$, respectivamente. Esboce o retrato de fase de $x' = A\,x$ nos seguintes casos:

(a) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$; (b) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$; (c) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$.

(26) Considere a equaç

com $b, c \in \mathbb{R}$ const

(a) Se $b^2 - 4c >$

para toda sol

(b) Trace o gráfic

para as três c

(27) Considere a equaçã

$x^{(n)}$

Como vimos na Intr

à equação vetorial d

$(x_1$

na qual $x_1' = x_2$, $x_2' =$

$\cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1$. Di

de ordem n. Escreva

$p_A(\lambda)$

é o polinômio caracte

da própria equação

obtida a partir da eq

na equação diferenci

$x(t) = e^{\lambda t}$ é uma so

satisfaz a equação $p_A($