Aula de hoje

1. Versão geral do Teorema de Cauchy
2. Teorema de Morera

Vamos relembrar algumas coisas...

Theorem (Cauchy-Goursat 1)

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ uma região e $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Se $\Delta \subset U$ é um triângulo inteiramente contido em U, então

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

Theorem (Cauchy-Goursat 2)

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ uma região estrelada e $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Se γ é um caminho fechado suave por partes em U, então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Vamos relembrar algumas coisas...

Theorem (Fórmula Integral de Cauchy 1)

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ *uma região e* $f : U \to \mathbb{C}$ *analítica. Dado* $z_0 \in U$ *e* $\gamma(t) = z_0 + \epsilon e^{it}$ *contida em* U*, com* $t \in [0, 2\pi]$*, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \ z \in B(z_0, \epsilon).$$

Vamos relembrar algumas coisas...

Theorem

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ uma região e $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Então:

(a) *existe $f^{(n)}(z)$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para todo $z \in U$;*

(b) *vale a identidade*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \ z \in B(z_0, \epsilon),$$

sendo $\gamma(t) = z_0 + \epsilon e^{it}$ contida em U, com $t \in [0, 2\pi]$;

(c) *se $|f(z)| \leq K$, para todo $z \in B(z_0, \epsilon)$, então*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!K}{\epsilon^n}.$$

Curvas de Jordan

Definition

Uma curva suave por partes, fechada e simples é dita uma curva de Jordan.

Definition

Considere $U \subset \mathbb{R}^2$ uma região e $V \subset U$ um subconjunto fechado e limitado, tal que ∂V é um número finito de curvas de Jordan:

- $\partial V = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$;
- adote em cada uma destas curvas a orientação de modo que o interior de V está sempre à esquerda.

Nestas condições, diremos que V e ∂V tem orientação compatível.

Teorema de Green

Theorem (Green)

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ uma região, $f : U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ e escreva $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Considere $V \subset U$ satisfazendo as seguintes condições

- *V é fechado e limitado;*
- *∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan*

$$\partial V = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n;$$

- *$V \setminus \partial V$ é uma região;*
- *V e ∂V tem orientação compatível.*

Nestas condições

$$\int_{\partial V} f = \int_{\partial V} udx + vdy = \int_V \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} dxdy$$

Theorem (Cauchy)

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ uma região e $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Considere $V \subset U$ satisfazendo as seguintes condições

- *V é fechado e limitado;*
- *∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan*

$$\partial V = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n;$$

- *$V \setminus \partial V$ é uma região;*

Nestas condições

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0.$$

Theorem (Fórmula Integral de Cauchy 2)

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ uma região e $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Considere $V \subset U$ satisfazendo as seguintes condições

- *V é fechado e limitado;*
- *∂V é uma Jordan, orientada no sentido anti-horário;*
- *$V \setminus \partial V$ é uma região;*

Nestas condições, se z_0 é um ponto interior de V, então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

Teorema de Morera

Theorem (Morera)

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ uma região e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Se

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

para cada triângulo $\Delta \subset U$, então f é analítica em U.