Aula de hoje

1. Séries de Laurent

Relembrando

Definition

Considere f uma função analítica em $B(a,\epsilon)\setminus\{a\}$ (a é uma singularidade isolada)

(a) Dizemos que a é removível se existe uma função analítca g em $B(a,\epsilon)$ tal que $g(z) = f(z)$, se $z \neq a$.

(b) Dizemos que a é um pólo se $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$.

(c) Dizemos que a é uma singularidade essencial se não é nem removível e nem pólo.

Theorem

Uma singularidade isolada é removível se, e somente,

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0.$$

Theorem

Uma singularidade isolada é um pólo se, e somente, existem $m \in \mathbb{N}$ e g analítca com $g(a) \neq 0$ tais que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}.$$

Séries

Considere $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de número complexos.

- Dizemos que a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente se o mesmo ocorre com as séries $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Neste caso:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

Considere $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de funções.

- Dizemos que a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente se o mesmo ocorre com as séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Neste caso:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

Série de Laurent

Theorem

Considere f analítica no anel

$$A_{a,\rho_1,\rho_2} = \{z;\ \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}.$$

Então,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

e $\gamma(t) = a + re^{it}$, *com* $\rho_1 < r < \rho_2$.

Observações

(a) Os coeficientes a_n não dependem da escolha do r.

(b) Precisaremos do seguinte lema:

Lemma

Considere uma série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *com raio de convergência* $\rho > 0$, *uma função contínua* $\phi : [a,b] \to B(0,\rho)$ *e* $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *integrável. Nestas condições,*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\phi(t))^n \psi(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(\phi(t))^n \psi(t)dt$$