EMA 705 - Análise Complexa

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

Exercício 1 *Estude os capítulos 1 e 2 do livro do Conway, dando atenção aso resultados sobre topologia e funções contínuas.*

Exercício 2 *Obtenha as partes reais e imaginárias do números*

(a) $(1-5i)^2 - 4i$; *(b)* $\dfrac{3-4i}{2+5i}$ *(c)* $\dfrac{z-i\overline{z}}{\overline{z}-iz}$

Exercício 3 *Faça um esboço no plano complexo dos seguintes conjuntos:*

(a) $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = |z-2|\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = |\overline{z}-1|\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C};\ Re(z) = Im(z-1)\}$;

Exercício 4 *Resolva as equações:*

(a) $z^3 = -27$; *(b)* $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$;

Exercício 5 *Resolva as equações:*

(a) $z - \overline{z} = 1$; *(b)* $z + \overline{z}i = 2 + i$; *(c)* $Re(z\overline{w}) = |z|\,|w|$;

Exercício 6 *Dado* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, *defini-se* $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$. *Quais propriedades básicas da função exponencial real são válidas em* $\mathbb{C}$*?*

Exercício 7 *Dado* $z \in \mathbb{C}$, *defini-se*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ \text{ e } \ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Quais propriedades básicas da funções seno e cosseno reais são válidas em $\mathbb{C}$*?*

Exercício 8 *Obtenha o domínio das funções complexas:*

(a) $f(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{z^2 + \overline{z}^2}$; *(b)* $g(z) = \dfrac{z}{z - \overline{z} - 1}$; *(c)* $h(z) = Log(e^z - e^{-z})$;

Exercício 9 *Considere* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *constantes reais e o polinômio*

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Mostre que se $p(z) = 0$, *para algum* $z \in \mathbb{C}$, *então* $p(\overline{z}) = 0$.

Exercício 10 *Mostre que, para todo* $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, *vale*

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 11 *Prove que* $e^{-|z|} \leqslant |e^z| \leqslant e^{|z|}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Exercício 12 *Considere* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *constantes complexas e o polinômio*

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Mostre que se $p(z_0) = 0$, *então existe um polinômio* g *tal que* $p(z) = (z - z_0)g(z)$. *Conclua que* p *possui no máximo* n *raízes.*

Exercício 13 *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *mostre que:*

(a) $sen^2(z) + cos^2(z) = 1$;

(b) $sen(-z) = -sen(z)$ *e* $cos(-z) = cos(z)$

(c) $sen(z + w) = sen(z)cos(w) + cos(z)sen(w)$ *e* $cos(z + w) = cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w)$;

Exercício 14 *Considere as funções complexas*

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad e \quad senh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Verifique quais dos itens do exercício anterior continuam válidos.

Exercício 15 *Considere a função* $f(z) = e^z$.

(a) Mostre que f *transforma a reta vertical* $R = \{z \in \mathbb{C}; Re(z) = a\}$ *no círculo* $C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = e^a\}$;

(b) Mostre que f *transforma a reta horizontal* $S = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) = b\}$ *na semi-reta* $L = \{z \in \mathbb{C}; z = re^{ib},\ r > 0\}$;

Exercício 16 *Estude o limite* $\lim_{n\to\infty} z^n$.

Exercício 17 *Calcule:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(i^{n!} + 2^n)$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{in^3 + 1}{2^3 + n^2}$;

(c) $\lim_{z\to i} \dfrac{4z + i}{z + 1}$;

(d) $\lim_{z\to z_0} \sqrt{z}$;

Exercício 18 *Dizemos que uma sequência* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy quando: dado* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n, m \geqslant n_0$ *implica em* $|z_n - z_m| < \epsilon$. *Mostre que* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy se, e somente se,* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

Dica: Existe um resultado similar para sequências em $\mathbb{R}$.

Exercício 19 *Dizemos que um conjunto* $K \subset \mathbb{C}$ *é compacto quando é limitado e fechado. Mostre que se* $f : K \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua, então existem* $\alpha, \beta \in K$ *tais que*

$$f(\alpha) \leqslant f(z) \leqslant f(\beta),\ \forall z \in K.$$

Exercício 20 *Suponha* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *uma função contínua tal que*

(i) $|f(z)| \to \infty$, *quando* $|z| \to \infty$,

(ii) $f(\mathbb{C})$ *é um conjunto aberto.*

Mostre que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Exercício 21 *Mostre que se* $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, *então*

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 22 *Dados* $\omega \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *determine todas as soluções da equação* $z^n = \omega$.

Exercício 23 *Dado* $\omega \in \mathbb{C}$, *determine todas as soluções da equação* $e^z = \omega$.

Exercício 24 *Mostre que se* f *e* g *são funções uniformemente contínuas sobre um mesmo domínio, então o mesmo ocorre com* $f + g$.

Exercício 25 *Sejam* $G \subset \mathbb{C}$ *uma região e* $f : G \to \mathbb{C}$ *uma função contínua satisfazendo* $e^{f(z)} = 1$, *para todo* $z \in G$. *Mostre que* f *é uma função constante cujo valor pertece ao conjunto* $\{2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercício 26 *Considere* $\omega \in \mathbb{C}$. *Mostre que se* $z = (\omega^2)^{1/2}$, *então* $\omega = z$, *ou* $\omega = -z$.

Exercício 27 *Dada uma função* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *diezemos que* $z_0 \in A$ *é um ponto fixo de* f *se* $f(z_0) = z_0$. *Determine os pontos fixos da função*

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 1}.$$

Exercício 28 *Qual o maior número de pontos fixos que uma função polinomial*

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \ n \geqslant 2,$$

pode ter?

Exercício 29 *Uma ordem num corpo* $\mathbb{K}$ *consiste em dar um subconjunto* $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$ *tal que:*

(a) *se* $x, y \in \mathbb{K}^+$, *então* $x + y \in \mathbb{K}^+$ *e* $x \cdot y \in \mathbb{K}^+$;

1. *dado* $x \in \mathbb{K}$, *então* $x \in \mathbb{K}^+$, *ou* $x = 0$, *ou* $-x \in \mathbb{K}^+$.

Mostre que o corpo $\mathbb{C}$ *não possui ordem.*