CM 068 - variáveis Complexas

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2

Exercício 1 *Prove que* $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = 1/z^2$ *é derivável e que* $f'(z) = -1/z^2$ *utilizando: definição, regra da cadeia e Cauchy-Riemann.*

Exercício 2 *Mostre que a função* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = e^{z^2}$ *é holomorfa. Obtenha* $f'(z)$

Exercício 3 *Sejam* A *um conjunto aberto de* $\mathbb{C}$ *e* $f : A \to \mathbb{C}$ *uma função analítica. Defina o conjunto aberto* $A^* = \{\overline{z};\ z \in A\}$ *e a função* $g : A^* \to \mathbb{C}$ *dada por* $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. *Prove que* g *é anlítica e que vale*

$$g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}.$$

Exercício 4 *Em quais pontos de* $\mathbb{C}$ *a função* $f(z) = Im(z)$ *é analítica?*

Exercício 5 *Sejam* $G \subset \mathbb{C}$ *uma região e* $f : G \to \mathbb{C}$ *analítica. Mostre que se* $Re(f)$, *ou* $Im(f)$, *é uma função constante em* G, *então* f *é constante em* G.

Exercício 6 *Sejam* $G \subset \mathbb{C}$ *uma região e* $f, g : G \to \mathbb{C}$ *analíticas. Mostre que se* $f'(z) = g'(z)$ *em* G, *então* f *e* g *diferem por uma constante.*

Exercício 7 *Verifique que se* f *é uma função inteira e só assume valroes reais, então* f *é constante.*

Exercício 8 *Verifique que se* f *e* $g = \overline{f}$ *são analíticas, então* f *é constante.*

Exercício 9 *Resolva a equação diferencial* $f' - \alpha f = 0$, *definida numa regiaão* G.

Exercício 10 *Mostre que as funções hiperbólicas*

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad e \quad \sinh(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

são holomorfas.

Exercício 11 *Utilizando o ramo principal de* z^λ *calcule:*

(a) $2^{\sqrt{2}}$.

(b) 1^i.

(c) $(5i)^{1+i}$.

Exercício 12 *Determine os pontos onde as funções abaixo são deriváveis e encontre as derivadas.*

(a) $cos(z)$.

(b) $e^{|z|}$.

(c) $xy + iy$.

(d) $1/z$.

(e) $e^{-y}(cosx + isenx)$.

(f) $\dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Exercício 13 *Obtenha o ramo da função*

$$h(z) = log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Exercício 14 *Calcule* $\int_\gamma f(z)dz$*:*

(a) $f(z) = z\overline{z}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(b) $f(z) = z/(z+1)$, $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(c) $f(z) = z/(z+1)$, $\gamma(t) = 1/4e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(d) $f(z) = z/(z+1)$, $\gamma(t) = 5i + e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

Exercício 15 *Calcule* $\int_\gamma f(z)dz$*, utilizando a fórmula de Cauchy:*

(a) $f(z) = z^2 + 1/(z+2)$, $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

(b) $f(z) = e^z/(2z = 1)$, $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

Exercício 16 *Mostre que* $\int_\gamma e^{kz}/zdz = 2\pi i$*, sendo* k *constante e* $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*. Use este resultado para mostrar que*

$$\int_0^\pi e^{k\cos(t)} cos(ksen(t))dt = \pi$$

Exercício 17 *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa, com* Ω *simplesmente conexo. Suponha que exista* $a \in \Omega$ *tal que* $|f(a)| \leqslant |f(z)|$ *para todo* $z \in \Omega$*. Mostre que, ou* $f(a) = 0$*, ou* f *é constante.*

Exercício 18 *Considere* $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [a, \pi]$ *e*

$$I(r) = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}.$$

Mostre que $I(r) \to 0$*, quando* $r \to \infty$*.*

Exercício 19 *É possível obter a regra da integração por partes? É possível obter a regra de L'Hôpital?*

Exercício 20 *Suponha que* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é uma função inteira tal que existem* $M \geq 0$, $R > 0$ *e* $n \geq 1$ *tais que* $|f(z)| \leq M|z|^n$*, para todo* $|z| \geq R$*. Mostre que* f *é um polinômio de grau* n*.*

Exercício 21 *Suponha que* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ *é uma função definida numa região* $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$*. Se existe* $f^{(k)}(z)$*,* $\forall z \in \mathcal{R}$ *e para cada* $1 \leq k \leq n$ *e* $f^{(k)} \equiv 0$*, então* f *é um polinômio de grau no máximo* $n-1$*.*

Exercício 22 *Suponha que* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ *é uma função definida numa região* $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ *tal que* $f(z) \neq 0$*, para cada* $z \in \mathcal{R}$*. Se* $B[z_0, r] \subset \mathcal{R}$*, mostre que*

$$\ln|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(z_0 + r^{it})|dt.$$

Exercício 23 *Considere um polinômio* $p(s) = a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n$ *e o operador diferencial*

$$p(f) = a_0 f + a_1 f^{(1)} + \ldots a_n f^{(n)}$$

definido para funções analíticas.

(a) *Mostre que* p *é um operador linear.*

(a) *Prove que* $p(e^{\lambda z}) = p(\lambda)e^{\lambda z}$. *Em particular, se* $p(\lambda) = 0$, *então* $e^{\lambda z}$ *é solução da equação diferencial* $p(f) = 0$.

(c) *Mostre que* $p(zf) = zp(f) + p'(f)$. *Assim, se* λ *é uma raíz de ordem 2 do polinômio* p, *então* $p(z^j e^{\lambda z}) = 0$, *para cada* $j \in \{0, \ldots, k-1\}$.

(d) *Mostre que*

$$\frac{d^n}{dz^n}(p(f)) = p\left(\frac{d^n}{dz^n}(f)\right)$$

Conclua que se $p(s) = p_1(s)p_2(s)$ *(produto de dois polinômios), então*

$$p(f) = p_1(p_2(f)) = p_2(p_1(f)).$$

(e) *Suponha*

$$p(s) = (s-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (s-\lambda_n)^{k_n}$$

tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq k$, *e* $k_j \geq 1$. *Mostre que toda função da forma*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{k_j-1} c_{\ell j} z^{\ell} e^{\lambda_j z}\right) \tag{1}$$

é solução de $p(f) = 0$.

(f) *Suponha que* $p(s)$ *tem grau* ≥ 1. *Dado* $z_0 \in \mathbb{C}$, *mostre que a única solução analítica da equação* $p(f) = 0$ *que satisfaz*

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

é a função identicamente nula. Conclua que $p(f)$ *possui única solução satisfazendo*

$$f(z_0) = c_0,\ f^{(1)}(z_0) = c_1,\ \ldots f^{(m-1)}(z_0) = c_{m-1},$$

sendo c_k *constantes dadas.*

(g) *Dadas* m *funções analítcas* $f_1, \ldots, f_m$ *defina*

$$W(z) = \det \doteq \begin{bmatrix} f_1(z) & \ldots & f_m(z) \\ f_2^{(1)}(z) & \ldots & f_2^{(1)}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(z) & \ldots & f_m^{(m-1)}(z) \end{bmatrix}$$

Mostre que se $f_1, \ldots, f_m$ *são soluções de* $p(f) = 0$, *então*

$$W(z) = e^{-a_{m-1}(z-z_0)}W(z_0).$$

(h) *Sejam* p *e* $f_1, \ldots, f_m$ *como acima. Suponha* $W(z_0) \neq 0$. *Prove que, dados* c_0, c_1, c_{m-1}, *existe única solução da equação* $p(f) = 0$ *da forma*

$$f = b_1 f_1 + \ldots b_m f_m$$

tal que

$$f(z_0) = c_0,\ f^{(1)}(z_0) = c_1,\ \ldots f^{(m-1)}(z_0) = c_{m-1}.$$

(i) *Suponha*

$$p(s) = (s-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (s-\lambda_n)^{k_n}$$

tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq k$, *e* $k_j \geq 1$. *Prove que as soluções de* $p(f) = 0$ *são da forma* (1).