CM 068 - variáveis Complexas

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3

Exercício 1 *Considere uma função* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *definida no disco* $D(z_0, r)$.

(a) *Mostre que se* f *é uma função par, então* $a_n = 0$ *para todo* n *ímpar (Vale a volta?);*

(b) *Mostre que se* f *é uma função ímpar, então* $a_n = 0$ *para todo* n *par (Vale a volta?);*

(c) *Se* $f(z_0) \neq 0$, *então quais devem ser os coeficientes de* $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$? *(Este item não depende dos dois anteriores.)*

Exercício 2 *Suponha que as séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ *convergem no disco* $D(z_0, r)$. *Mostre que se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

para cada $z \in D(z_0, r)$, *então* $a_n = b_n$ *para todo* n.

Exercício 3 *Considere* f *e* g *duas funções analíticas em* z_0, *tais que* $f(z_0) = g(z_0) = 0$.

(a) *Utilizando séries, mostre que*

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \right) = f'(z_0).$$

(b) *Se* $g'(z_0) \neq 0$, *mostre que*

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Exercício 4 *Obtenha as séries de Taylor das funções abaixo em* $z_0 = 0$.

(a) $f(z) = e^{z^2}$; (b) $f(z) = sen(2z)$; (c) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$;

Exercício 5 *Dada uma seqência de números reais* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *defina*

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} [\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots, \}]$$

(a) *Verifique que* $\limsup$ *é o maior dos pontos aderentes de uma sequência;*

(b) *Mostre se* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* x, *então* $\limsup a_n = x$.

Exercício 6 *Considere uma série de potências*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ z_0 \in \mathbb{C}, \ a_n \in \mathbb{C}.$$

Defina

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}, & se \quad \limsup |a_n|^{1/n} \neq 0, \\ \infty, \quad se \quad \limsup |a_n|^{1/n} = 0. \end{cases}$$

(a) *Mostre que $S(z)$ converge absolutamente em $B(z_0, R)$;*

(b) *Mostre que $S(z)$ não converge se $|z - z_0| > R$;*

(c) *Mostre que $S(z)$ converge uniformemente em $B(z_0, R_1)$, para $R_1 < R$.*

(d) *O núemero R é o único que satisfaz (a) e (b).*

Exercício 7 *Suponha que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira tal que existem $M \geq 0$, $R > 0$ e $n \geq 1$ tais que $|f(z)| \leq M|z|^n$, para todo $|z| \geq R$. Mostre que f é um polinômio de grau n.*

Exercício 8 *Suponha que $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ é uma função definida numa região $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$. Se existe $f^{(k)}(z)$, $\forall z \in \mathcal{R}$ e para cada $1 \leq k \leq n$ e $f^{(k)} \equiv 0$, então f é um polinômio de grau no máximo $n - 1$.*

Exercício 9 *Utilizando a fórmula integral de Cauchy, demonstre o Teorema de Cayley-Hamilton: sejam $A_{n \times n}$ uma matrix com entradas complexas e $f(z) = \det(zI - A)$ seu polinômio característico. Nestas condições, $f(A) = 0$.* **Dica:** `https://www.jstor.org/stable/2318415?seq=1#metadata_info_tab_contents`

Exercício 10 *Considere*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ z_0 \in \mathbb{C}, \ a_n \in \mathbb{C}.$$

com convergência uniforme em $B[z_0, R]$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n}.$$

Exercício 11 *Sejam f e g duas funções analíticas numa região U. Suponha que exista $\{z_n\} \subset U$ tal que $z_n \to a \in U$. Mostre que se, $f(z_n) = g(z_n)$, para cada n, então $f(z) = g(z)$ para cada $z \in U$.*

Exercício 12 *Mostre que as seguintes séries convergem uniformemente no disco $D(0, 1)$.*

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ncos(3n)}{1 + 5n} z^n$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3cos(n)}{10n^2 + 7} z^{2n-1}$$

Exercício 13 *Obtenha o raio de convergência das séries:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 1}{n} z^n$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3i)^n}(z-1)^n$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3i}\, n} z^n$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n z^n$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2i}}{2^n}(z-\pi)^n$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$;

Exercício 14 *Demonstre o seguinte resultado: Sejam f e g duas funções analíticas num disco centrado em z_0. Se z_0 é um zero de ordem n de f e um zero de ordem m de g, então a função $h = f/g$*

(a) *tem um zero de ordem $n - m$ em z_0 se $n > m$;*

(b) *tem uma singularidade removível em z_0 se $n = m$;*

(c) *tem um pólo de ordem m em z_0 se $m > n$.*

Exercício 15 *Classifique as singularidades no ponto z_0 e obtenha os resíduos $Res(f)|_{z=z_0}$*

(a) $f(z) = cotg(z)$, $z_0 = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;

(b) $f(z) = (z-1)^{-3} cos(\pi z/2)$, $z_0 = 1$;

(c) $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$, $z_0 = 0$;

(d) $f(z) = (z^2+1)^{-3}$, $z_0 = -i$;

(e) $f(z) = sen(1/z)$, $z_0 = 0$;

(f) $f(z) = (cos(z) - 1)/z^2$, $z_0 = 0$;

(g) $f(z) = z/1 - cos(z)$, $z_0 = 0$;

Exercício 16 *Calcule as integrais:*

(a) $\int_\gamma z^2 e^{i/z} dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

(b) $\int_\gamma z^5 sen(z^{-2}) dz$, $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

(c) $\int_\gamma (1+z)(1 - sen(z))^{-1} dz$, $\gamma(t) = 8e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

(d) $\int_\gamma e^z/sen(z) dz$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

Exercício 17 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)} dz$$

considerando γ os círculos:

(a) $|z| = 3$;

(b) $|z + 3i| = 3$;

(c) $|z - 2i| = 1/3$;

(d) $|z - 1| = 2$;

Exercício 18 *Faça o que se pede.*

(a) *Utilizando séries de Laurent, classifique a singularidade da função $f(z) = z^2 e^{1/z^3}$, $z \neq 0$.*

(b) *Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma z^2 e^{1/z^3} dz$, sendo γ a curva $|z| = 2018$.*

Exercício 19 *Considere a função $f : \mathbb{C}/\{0,1\} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}.$$

Utilizando o teorema de resíduos, calcule a integral

$$\int_\gamma f(z) dz, \quad \text{sendo } \gamma \text{ o círculo } |z| = 2.$$

Obs: É obrigatório justificar a ordem dos pólos.

Exercício 20 *Mostre que*

(a)
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \ |z| < 1.$$

(b)
$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n, \ |z| < 1.$$

Exercício 21 *Obtenha as séries de Laurent nos pontos indicados.*

(a) $f(z) = (z-3)sen\left(\frac{1}{z+2}\right)$, *com* $z_0 = -2$;

(b) $f(z) = e^{z^2}$, *com* $z_0 = 0$;

(c) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, *com* $z_0 = 1$;

(d) $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}sen(\pi z)$, *com* $z_0 = 1$;

(e) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$, *com* $z_0 = -1$ *e* $z_0 = i$;

(f) $f(z) = z^3e^{1/z}$, *com* $z_0 = 0$;

(g) $f(z) = \frac{cos(z)}{z}$, *com* $z_0 = 0$;

Exercício 22 *Obtenha as séries de Laurent nos aneis indicados.*

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, *com* $A = \{z;\ 1 < |z-2i| < 3\}$;

(b) $f(z) = \frac{1}{z^4(e^{z^2}-1)}$, *com* $A = \{z;\ 0 < |z| < \infty\}$;

Exercício 23 *Considere a função* $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$f(z) = z^3 sen\left(\frac{1}{z}\right)$$

(a) *Obtenha a série de Laurent de* f *em torno da origem e obtenha os coeficientes* a_{-1} *e* a_2;

(b) *Calcule a integral* $\int_\gamma f(z)dz$, *sendo* γ *um círculo centrado na origem;*

(c) *Calcule a integral* $\int_\gamma sen(1/z)dz$, *sendo* γ *um círculo centrado na origem;*

Exercício 24 *Classifique as singularidades das funções abaixo nos pontos indicados:*

(a) $f(z) = e^{1/z}$, $z = 0$; *(b)* $g(z) = 1/(z^2+1)$, $z = i$; *(c)* $h(z) = sen(z)/z$, $z = 0$;

Exercício 25 *Considere a função* $f : \mathbb{C}\setminus\{0,-3,3\} \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}.$$

(a) *Determine a ordem dos pólos de* f;

(b) *Calcule os resíduos de* f *em cada um de seus pólos;*

(c) *Calcule a integral* $\int_\gamma f(z)dz$, *sendo* γ *o círculo* $|z| = 1$;

Exercício 26 *Sejam* a, b *números reais com* $a > 0$, $b > 0$ *e* $a \neq b$. *Mostre que*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Exercício 27 *Sejam a, b e c constantes reais satisfazendo $b^2 - 4ac < 0$ e $a \neq 0$.*

(a) *Calcule a integral (utilizando o teorema de resíduos)*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

(Resposta em função de a, b e c.)

(b) *Como aplicação, calcule*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$