# Cáculo 2 - CMM 042 - Eng. de Produção

Fernando de Ávila Silva

Polinômios de Taylor

# APLICAÇÕES DE DIFERENCIABILIDADE

## 04/10

1. Pontos críticos;
2. Polinômio de Taylor;

# Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo $A$ um conjunto aberto. Dizemos que $a$ é um ponto de:

# Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo $A$ um conjunto aberto. Dizemos que $a$ é um ponto de:

(a) mínimo local de $f$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \ \longrightarrow \ f(a) \leqslant f(x);$$

# Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo $A$ um conjunto aberto. Dizemos que $a$ é um ponto de:

(a) mínimo local de $f$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x);$$

(b) máximo local de $f$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a);$$

# Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo $A$ um conjunto aberto. Dizemos que $a$ é um ponto de:

(a) mínimo local de $f$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x);$$

(b) máximo local de $f$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a);$$

(c) um ponto crítico se $f$ é diferenciável e vale

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) = (0, 0).$$

## Theorem

*Se $f$ é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então $a$ é um ponto crítico.*

## Theorem

*Se $f$ é diferenciável e $a \in U$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então $a$ é um ponto crítico.*

## Example

Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \; g(x, y) = -x^2 - y^2 \;\text{ e }\; h(x, y) = x^2 - y^2$$

# Polinômio de Taylor de ordem 1

# Polinômio de Taylor de ordem 1

## Theorem

*Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^2$ *no aberto* $A$*. Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in A$*. Neste caso, podemos escrever*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + r(h) \\ &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + r(h_1, h_2) \end{aligned}$$

*sendo que* $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0.$

- Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- Obtemos ainda o polinômio

$$P(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0)$$

- Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- Obtemos ainda o polinômio

$$P(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0)$$

## Importante:

Estas duas expressões valem, a priori, para $(x, y)$ numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

# Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para $(x, y)$ próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

# Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para $(x, y)$ próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x, y) = x + y - 1.$$

# Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para $(x,y)$ próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x,y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x,y) = x + y - 1.$$

- Por exemplo:

$$f\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498$$
$$P\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00497$$

# Polinômio de Taylor de ordem 2

# Polinômio de Taylor de ordem 2

## Theorem

*Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^3$ *no aberto A. Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in A$*. Neste caso, podemos escrever*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + r(h),$$

*sendo que* $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{||h||^2} = 0.$

- Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

- Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2\right] +$$

$$+ r(x - x_0, y - y_0)$$

- Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(a) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot(y-y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot(y-y_0)^2\right] + \\
&+ r(x-x_0, y-y_0)
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
P(x,y) = f(a) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot(y-y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot(y-y_0)^2\right]
\end{aligned}
$$

- Pondo $a=(x_0,y_0)$ e $(x,y)=(x_0+h_1,y_0+h_2)$ obtemos:

$$f(x,y)=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\cdot(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot(y-y_0)^2\right]+$$
$$+r(x-x_0,y-y_0)$$

e também

$$P(x,y)=f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)\cdot(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot(y-y_0)^2\right]$$

## Importante:

Ambas expressões valem, a priori, para $(x,y)$ numa vizinhança do ponto $a=(x_0,y_0)$

Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

# Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para $(x,y)$ próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2)+r.$$

# Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para $(x,y)$ próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2)+r.$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2).$$

# Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para $(x,y)$ próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2)+r.$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2).$$

- Por exemplo:

$$f\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498754$$
$$P\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498750$$

# Como classificar pontos de máximo e mínimo?

- Supondo $f$ de classe $C^3$ e $a = (x_0, y_0)$ um ponto de máximo:

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) - f(a) =& \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot k^2\right] + r(h,k) \\
=& \frac{1}{2}\left\langle H_f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle + r(h,k)
\end{aligned}
$$

sendo $H_f(x_0, y_0)$ a matriz (simétrica)

$$
H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}
$$

# Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2 \ \text{ e } \ h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

$$\begin{aligned}
\langle H_f(0,0)\cdot(h,k)^T, (h,k)^T\rangle &= 2(h^2+k^2),\\
\langle H_f(0,0)\cdot(h,k)^T, (h,k)^T\rangle &= -2(h^2+k^2),\\
\langle H_g(0,0)\cdot(h,k)^T, (h,k)^T\rangle &= 2(h^2-k^2).
\end{aligned}$$