

Cáculo 2 - CMM 042 - Eng. de Produção

Fernando de Ávila Silva

Classificação de Pontos Críticos

APLICAÇÕES DE DIFERENCIABILIDADE

04/10

1. Pontos críticos;
2. Polinômio de Taylor;

07/10

1. Formas quadráticas;
2. Matriz Hessiana;
3. Classificação de pontos críticos

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto.
Dizemos que a é um ponto de:

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto.
Dizemos que a é um ponto de:

(a) mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leq f(x);$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto. Dizemos que a é um ponto de:

(a) mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leq f(x);$$

(b) máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leq f(a);$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto. Dizemos que a é um ponto de:

- (a) mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leq f(x);$$

- (b) máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leq f(a);$$

- (c) um ponto crítico se f é diferenciável e vale

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) = (0, 0).$$

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in A$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in A$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Example

Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Polinômio de Taylor de ordem 1

Theorem

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 no aberto A . Fixado $a \in A$ considere $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a + h \in A$. Neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + r(h) \\ &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + r(h_1, h_2) \end{aligned}$$

sendo que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

- Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- ▶ Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- ▶ Obtemos ainda o polinômio

$$P(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0)$$

- ▶ Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- ▶ Obtemos ainda o polinômio

$$P(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0)$$

Importante:

Estas duas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- ▶ Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- ▶ Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

- ▶ O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x, y) = x + y - 1.$$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- ▶ Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

- ▶ O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x, y) = x + y - 1.$$

- ▶ Por exemplo:

$$f\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498$$

$$P\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00497$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Polinômio de Taylor de ordem 2

Theorem

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 no aberto A . Fixado $a \in A$ considere $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a + h \in A$. Neste caso, podemos escrever

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + r(h),$$

sendo que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0$.

- ▶ Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

► Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2 \right] + \\ & + r(x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$

► Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2 \right] + \\ + r(x - x_0, y - y_0)$$

e também

$$P(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2 \right]$$

► Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2 \right] + \\ + r(x - x_0, y - y_0)$$

e também

$$P(x, y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2 \right]$$

Importante:

Ambas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- ▶ Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 - \frac{1}{2} [(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2] - (x - 1/2)(y - 1/2) + r.$$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- ▶ Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 - \frac{1}{2} [(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2] - (x - 1/2)(y - 1/2) + r.$$

- ▶ O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x, y) = x + y - 1 - \frac{1}{2} [(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2] - (x - 1/2)(y - 1/2).$$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- ▶ Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 - \frac{1}{2} [(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2] - (x - 1/2)(y - 1/2) + r.$$

- ▶ O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x, y) = x + y - 1 - \frac{1}{2} [(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2] - (x - 1/2)(y - 1/2).$$

- ▶ Por exemplo:

$$f\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498754$$

$$P\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498750$$

Como classificar pontos de máximo e mínimo?

- Supondo f de classe C^3 e $a = (x_0, y_0)$ um ponto de máximo:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(a) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot k^2 \right] + r(h, k) \\ &= \frac{1}{2} \left\langle H_f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle + r(h, k) \end{aligned}$$

sendo $H_f(x_0, y_0)$ a matriz (simétrica)

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

$$\langle H_f(0, 0) \cdot (h, k)^T, (h, k)^T \rangle = 2(h^2 + k^2),$$

$$\langle H_g(0, 0) \cdot (h, k)^T, (h, k)^T \rangle = -2(h^2 + k^2),$$

$$\langle H_h(0, 0) \cdot (h, k)^T, (h, k)^T \rangle = 2(h^2 - k^2).$$

Generalização

Considerando uma função de classe C^4 e as notações

$$df(a) \cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i,$$

$$d^2f(a) \cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \alpha_i \alpha_j,$$

$$d^3f(a) \cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

podemos escrever

$$f(a+v) - f(a) = df(a) \cdot v + \frac{1}{2} d^2f(a) \cdot v^2 + \frac{1}{3!} d^3f(a) \cdot v^3 + r_3(v),$$

sendo

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|^3} = 0.$$

Considere uma matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Uma forma quadrática, definida por A , é uma função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(v) = \langle A \cdot v^T, v^T \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} \alpha_i \alpha_j,$$

sendo $v = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Considere uma matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Uma forma quadrática, definida por A , é uma função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(v) = \langle A \cdot v^T, v^T \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} \alpha_i \alpha_j,$$

sendo $v = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em \mathbb{R}^2 é:

- (a) **não-negativa** se $H(v) \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em \mathbb{R}^2 é:

- (a) **não-negativa** se $H(v) \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;
- (b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em \mathbb{R}^2 é:

- (a) **não-negativa** se $H(v) \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;
- (b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
- (c) **não-positiva** se $H(v) \leq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em \mathbb{R}^2 é:

- (a) **não-negativa** se $H(v) \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;
- (b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
- (c) **não-positiva** se $H(v) \leq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;
- (d) **é negativa** se $H(v) < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em \mathbb{R}^2 é:

- (a) **não-negativa** se $H(v) \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;
- (b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
- (c) **não-positiva** se $H(v) \leq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;
- (d) **é negativa** se $H(v) < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
- (e) **é indefinida** se existem $v, u \in \mathbb{R}^2$ tais que $H(v) < 0$ e $H(u) > 0$.

Teorema de Schwarz

Theorem

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Então, vale a igualdade

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$

para todo $(x, y) \in A$.

Matriz Hessiana

Considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Definimos a matriz Hessiana de f no ponto (x, y) por

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

Matriz Hessiana

Considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Definimos a matriz Hessiana de f no ponto (x, y) por

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

Remark

Como f é de classe C^2 , então $H_f(x, y)$ é simétrica. Nesse caso, está bem definida a forma quadrática

$$H_f(x, y) \cdot v^2 = \langle H_f(x, y)v^T, v^T \rangle$$

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

- ▶ $H_f(0, 0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma positiva**;

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

- ▶ $H_f(0, 0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma positiva**;
- ▶ $H_g(0, 0) \cdot v^2 = -2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma negativa**;

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

- ▶ $H_f(0, 0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma positiva**;
- ▶ $H_g(0, 0) \cdot v^2 = -2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma negativa**;
- ▶ $H_h(0, 0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 - \beta^2)$, **forma indefinida**;

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $H_f(a)$ **positiva** $\Rightarrow a$ é um ponto de **mínimo** local;

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

- (a) $H_f(a)$ **positiva** \Rightarrow a é um ponto de **mínimo** local;
- (b) $H_f(a)$ **negativa** \Rightarrow a é um ponto de **máximo** local;

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

- (a) $H_f(a)$ **positiva** \Rightarrow a é um ponto de **mínimo** local;
- (b) $H_f(a)$ **negativa** \Rightarrow a é um ponto de **máximo** local;
- (c) $H_f(a)$ **indefinida** \Rightarrow a **não** é ponto de máximo e **nem** mínimo local;

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

- (a) $H_f(a)$ **positiva** \Rightarrow a é um ponto de **mínimo** local;
- (b) $H_f(a)$ **negativa** \Rightarrow a é um ponto de **máximo** local;
- (c) $H_f(a)$ **indefinida** \Rightarrow a **não** é ponto de máximo e **nem** mínimo local;

Remark

Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e a é um ponto de mínimo local, então $H_f(a)$ é não-negativa.

Remark

Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e a é um ponto de máximo local, então $H_f(a)$ é não-positiva.

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y) . A função

$$A \ni (x, y) \mapsto \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f .

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y) . A função

$$A \ni (x, y) \mapsto \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f .

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

$$(a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0 \text{ e } \det H_f(a) > 0 \Rightarrow a \text{ é um ponto de } \mathbf{mínimo} \text{ local};$$

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y) . A função

$$A \ni (x, y) \mapsto \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f .

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ e $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ é um ponto de **mínimo** local;
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ e $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ é um ponto de **máximo** local;

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y) . A função

$$A \ni (x, y) \mapsto \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f .

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ e $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ é um ponto de **mínimo** local;
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ e $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ é um ponto de **máximo** local;
- (c) $\det H_f(a) < 0 \Rightarrow a$ **não** é ponto de máximo e **nem** mínimo local;

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y) . A função

$$A \ni (x, y) \mapsto \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f .

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ e $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ é um ponto de **mínimo** local;
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ e $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow a$ é um ponto de **máximo** local;
- (c) $\det H_f(a) < 0 \Rightarrow a$ **não** é ponto de máximo e **nem** mínimo local;
- (d) Se $\det H_f(a) = 0$, então nada pode ser afirmado.

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

- ▶ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\det H_f(0, 0) = 4 \Rightarrow (0, 0)$ é um ponto de **mínimo** local;

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

- ▶ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\det H_f(0, 0) = 4 \Rightarrow (0, 0)$ é um ponto de **mínimo** local;
- ▶ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = -2$ e $\det H_g(0, 0) = 4 \Rightarrow (0, 0)$ é um ponto de **máximo** local;

Exemplos

Para as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = -x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2$$

temos

- ▶ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\det H_f(0, 0) = 4 \Rightarrow (0, 0)$ é um ponto de **mínimo** local;
- ▶ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = -2$ e $\det H_g(0, 0) = 4 \Rightarrow (0, 0)$ é um ponto de **máximo** local;
- ▶ $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\det H_h(0, 0) = -4 \Rightarrow (0, 0)$ **não** é máximo e **nem** mínimo;

Aplicação

Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com 1 m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.