Cáculo 2 - CMM 042 - Eng. de Produção

Fernando de Ávila Silva

Classificação de Pontos Críticos

APLICAÇÕES DE DIFERENCIABILIDADE

04/10

1. Pontos críticos;
2. Polinômio de Taylor;

07/10

1. Formas quadráticas;
2. Matriz Hessiana;
3. Classificação de pontos críticos

09/10

1. Máximos e mínimos sobre conjuntos compactos.
2. Multiplicador de Lagrange

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto. Dizemos que a é um ponto de:

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto. Dizemos que a é um ponto de:

(a) mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a,\delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x);$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto. Dizemos que a é um ponto de:

(a) mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x);$$

(b) máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a);$$

Pontos críticos

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $a \in A$, sendo A um conjunto aberto. Dizemos que a é um ponto de:

(a) mínimo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(a) \leqslant f(x);$$

(b) máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B(a, \delta) \longrightarrow f(x) \leqslant f(a);$$

(c) um ponto crítico se f é diferenciável e vale

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) = (0, 0).$$

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in A$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Theorem

Se f é diferenciável e $a \in A$ é um ponto de mínimo (ou máximo), então a é um ponto crítico.

Example

Considere as funções $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$

Polinômio de Taylor de ordem 1

Polinômio de Taylor de ordem 1

Theorem

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *no aberto* A*. Fixado* $a \in A$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in A$*. Neste caso, podemos escrever*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + r(h) \\ &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + r(h_1, h_2) \end{aligned}$$

sendo que $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{||h||} = 0$.

- Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- Obtemos ainda o polinômio

$$P(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0)$$

- Podemos então escrever $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ o que implica em

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

- Obtemos ainda o polinômio

$$P(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0)$$

Importante:

Estas duas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para (x,y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x,y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x, y) = x + y - 1.$$

Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para (x,y) próximo de $(1/2,1/2)$:

$$f(x,y) = x + y - 1 + r(x - 1/2, y - 1/2).$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x,y) = x + y - 1.$$

- Por exemplo:

$$f\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498$$
$$P\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00497$$

Polinômio de Taylor de ordem 2

Polinômio de Taylor de ordem 2

Theorem

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^3 *no aberto* A*. Fixado* $a \in A$ *considere* $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in A$*. Neste caso, podemos escrever*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + r(h),$$

sendo que $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|^2} = 0.$

- Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

- Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2\right] +$$
$$+ r(x - x_0, y - y_0)$$

- Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$f(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2\right] +$$
$$+ r(x - x_0, y - y_0)$$

e também

$$P(x,y) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2\right]$$

- Pondo $a = (x_0, y_0)$ e $(x, y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(a) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2\right] + \\
&+ r(x - x_0, y - y_0)
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
P(x,y) = f(a) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \cdot (y - y_0)^2\right]
\end{aligned}
$$

Importante:

Ambas expressões valem, a priori, para (x, y) numa vizinhança do ponto $a = (x_0, y_0)$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para (x,y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2)+r.$$

Exemplo: $f(x, y) = \ln(x + y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para (x, y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x, y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2)+r.$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x, y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2).$$

Exemplo: $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $a = (1/2, 1/2)$

- Neste caso, obtemos para (x,y) próximo de $(1/2, 1/2)$:

$$f(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2)+r.$$

- O Polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = (1/2, 1/2)$ é

$$P(x,y) = x+y-1-\frac{1}{2}\left[(x-1/2)^2+(y-1/2)^2\right]-(x-1/2)(y-1/2).$$

- Por exemplo:

$$f\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498754$$
$$P\left(\frac{1}{2,01}, \frac{1}{2,01}\right) \approx -0,00498750$$

Como classificar pontos de máximo e mínimo?

- Supondo f de classe C^3 e $a = (x_0, y_0)$ um ponto de máximo:

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) - f(a) =& \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\cdot k^2\right] + r(h,k) \\
=& \frac{1}{2}\left\langle H_f(x_0, y_0)\cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\rangle + r(h,k)
\end{aligned}
$$

sendo $H_f(x_0, y_0)$ a matriz (simétrica)

$$
H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}
$$

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

$$\begin{aligned}
\langle H_f(0,0) \cdot (h,k)^T, (h,k)^T \rangle &= 2(h^2 + k^2), \\
\langle H_f(0,0) \cdot (h,k)^T, (h,k)^T \rangle &= -2(h^2 + k^2), \\
\langle H_g(0,0) \cdot (h,k)^T, (h,k)^T \rangle &= 2(h^2 - k^2).
\end{aligned}$$

Generalização

Considerando uma função de classe C^4 e as notações

$$df(a) \cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i,$$

$$d^2 f(a) \cdot v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \alpha_i \alpha_j,$$

$$d^3 f(a) \cdot v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

podemos escrever

$$f(a+v) - f(a) = df(a) \cdot v + \frac{1}{2} d^2 f(a) \cdot v^2 + \frac{1}{3!} d^3 f(a) \cdot v^3 + r_3(v),$$

sendo

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|^3} = 0.$$

Considere uma matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ a_{12} = a_{21}.$$

Uma forma quadrádica, definida por A, é uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(v) = \langle A \cdot v^T, v^T \rangle = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, \alpha_i \alpha_j,$$

sendo $v = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Considere uma matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ a_{12} = a_{21}.$$

Uma forma quadrádica, definida por A, é uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(v) = \langle A \cdot v^T, v^T \rangle = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, \alpha_i \alpha_j,$$

sendo $v = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H(v) \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H(v) \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H(v) \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H(v) \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H(v) \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H(v) \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(d) **é negativa** se $H(v) < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

Formas positivas e negativas

Dizemos que uma forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ é:

(a) **não-negativa** se $H(v) \geqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(b) **positiva** se $H(v) > 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(c) **não-positiva** se $H(v) \leqslant 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$;

(d) **é negativa** se $H(v) < 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(e) **é indefinida** se existem $v, u \in \mathbb{R}^2$ tais que $H(v) < 0$ e $H(u) > 0$.

Teorema de Schwarz

Theorem

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2. *Então, vale a igualdade*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$

para todo $(x, y) \in A$.

Matriz Hessiana

Considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Definimos a matriz Hessiana de f no ponto (x, y) por

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Matriz Hessiana

Considere $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Definimos a matriz Hessiana de f no ponto (x, y) por

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Remark

Como f é de classe C^2, então $H_f(x,y)$ é simétrica. Nesse caso, está bem definida a forma quadrática

$$H_f(x,y) \cdot v^2 = \langle H_f(x,y) v^T, v^T \rangle$$

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; g(x,y) = -x^2 - y^2 \; \text{ e } \; h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; g(x,y) = -x^2 - y^2 \; \text{ e } \; h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

- $H_f(0,0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma positiva**;

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2 \ \text{e}\ h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

- $H_f(0,0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma positiva**;
- $H_g(0,0) \cdot v^2 = -2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma negativa**;

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\; g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

- $H_f(0,0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma positiva**;
- $H_g(0,0) \cdot v^2 = -2(\alpha^2 + \beta^2)$, **forma negativa**;
- $H_h(0,0) \cdot v^2 = 2(\alpha^2 - \beta^2)$, **forma indefinida**;

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *e* $a \in U$ *um ponto crítico.*

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $H_f(a)$ ***negativa*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $H_f(a)$ ***negativa*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

(c) $H_f(a)$ ***indefinida*** $\Rightarrow$ *a* ***não*** *é ponto de máximo e* ***nem*** *mínimo local;*

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $H_f(a)$ ***positiva*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

(b) $H_f(a)$ ***negativa*** $\Rightarrow$ *a é um ponto de **máximo** local;*

(c) $H_f(a)$ ***indefinida*** $\Rightarrow$ *a **não** é ponto de máximo e **nem** mínimo local;*

Remark

Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e a é um ponto de mínimo local, então $H_f(a)$ é não-negativa.

Remark

Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e a é um ponto de máximo local, então $H_f(a)$ é não-positiva.

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y). A função

$$A \ni (x, y) \mapsto \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x, y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x, y). A função

$$A \ni (x, y) \mapsto \det H_f(x, y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x,y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x,y). A função

$$A \ni (x,y) \mapsto \det H_f(x,y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x,y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x,y). A função

$$A \ni (x,y) \mapsto \det H_f(x,y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a é um ponto de **máximo** local;*

(c) $\det H_f(a) < 0 \Rightarrow$ *a **não** é ponto de máximo e **nem** mínimo local;*

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $H_f(x,y)$ sua matriz Hessiana num ponto (x,y). A função

$$A \ni (x,y) \mapsto \det H_f(x,y)$$

é chamada de *hessiano* de f.

Theorem

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in U$ um ponto crítico.

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a é um ponto de* ***mínimo*** *local;*

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \Rightarrow$ *a é um ponto de* ***máximo*** *local;*

(c) $\det H_f(a) < 0 \Rightarrow$ *a* ***não*** *é ponto de máximo e* ***nem*** *mínimo local;*

(d) *Se* $\det H_f(a) = 0$*, então nada pode ser afirmado.*

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; g(x,y) = -x^2 - y^2 \;\text{ e }\; h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\; g(x,y) = -x^2 - y^2 \;\text{ e }\; h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ e $\det H_f(0,0) = 4 \;\Rightarrow\; (0,0)$ é um ponto de **mínimo** local;

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ g(x,y) = -x^2 - y^2 \text{ e } h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ e $\det H_f(0,0) = 4 \Rightarrow (0,0)$ é um ponto de **mínimo** local;
- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = -2$ e $\det H_g(0,0) = 4 \Rightarrow (0,0)$ é um ponto de **máximo** local;

Exemplos

Para as funções

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \; g(x,y) = -x^2 - y^2 \; \text{ e } \; h(x,y) = x^2 - y^2$$

temos

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$ e $\det H_f(0,0) = 4 \;\Rightarrow\; (0,0)$ é um ponto de **mínimo** local;
- $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = -2$ e $\det H_g(0,0) = 4 \;\Rightarrow\; (0,0)$ é um ponto de **máximo** local;
- $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = 2$ e $\det H_h(0,0) = -4 \;\Rightarrow\; (0,0)$ **não** é máximo e **nem** mínimo;

Aplicação

Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com 1 m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

Definition (Conjunto limitado)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se estiver contindo em alguma bola aberta centrada na origem.

Theorem

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, existe $M \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq M, \ \forall x \in A.$$

Definition (Conjunto compacto)

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto se é limitado e fechado.

Theorem (de Weierstrass)

Suponha f uma função contínua no compacto $A \subset \mathbb{R}^n$. Nestas condições, existem $a, b \in A$ tais que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \ \forall x \in A.$$

Exemplo

Vamos determinar os extremantes da função

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$

no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 2 \ \text{ e } \ |y| \leq 2\}$$

Tática

1. Pontos críticos no interior de A;
2. Análise dos pontos de fronteira;

Exemplo

Vamos determinar os extremantes da função

$$f(x,y) = 2x + y$$

no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq, \ y \geq 0, \ x + y \leq 4 \ \text{ e } \ 3x + y \leq 6\}$$

Tática

1. Pontos críticos no interior de A;
2. Análise dos pontos de fronteira;

Multiplicadores de Lagrange

Definition (Extremante local de uma restrição)

Considere f uma função diferenciável num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e

$$B = \{(x,y) \in A;\ g(x,y) = 0\},$$

sendo g uma função de calsse C^1 que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\nabla g(x,y) \neq (0,0),\ \forall (x,y) \in B.$$

Dizemos que $(x,y) \in B$ é um extremante local de $f\,|_B$ se existe λ tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Exemplos

1. Vamos determinar os extremantes de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.
2. Determinar a reta tangente à curva $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, $x > 0$ e $y > 0$, que forma com os eixos o triângulo de área mínima.
3. Considere uma forma quadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Obtenha os pontos extremantes da restrição de f ao conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.