Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: O espaço $\mathbb{R}^n$ e funções de várias variáveis

---

1 O espaço $\mathbb{R}^n$

Exercício 1 *Sejam* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ *e* $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, *com* $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Mostre que:*

1. $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = (0, \ldots, 0)$;
2. $| < x, y > | \leqslant \|x\|\|y\|$;
3. $| < x, y > | = \|x\|\|y\|$ *se, e só se,* $x = \alpha y$, *para algum* $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\langle \alpha x + y, w\rangle = \alpha\langle x, w\rangle + \langle y, w\rangle$, *para quaisquer* $x, y, w \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;
5. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(quando vale a igualdade?)*;
6. $\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
7. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$
8. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$, *para qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$;
9. $|x_j| \leq \|x\|$, *pra cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$;

Dica: *Tente fazer primeiramente para o caso* $n = 2$.

Exercício 2 *Determine a equação da reta que passa pelo ponto* $(1, -1)$ *e que seja perpendicular à reta* $2x + y = 1$.

Exercício 3 *Determine a equação do plano que passa pelo ponto* $(1, 1, 1)$ *e que seja perpendicular ao vetor* $(2, 1, 3)$.

Exercício 4 *Calcule a norma dos vetores abaixo:*

(a) $u = (1, 2)$

(b) $u = (0, 1, 2)$

(c) $u = (2, 1, 3)$

1.1 Desafios

Exercício 5 *Sejam* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|_\infty = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |x_j|$.

1. *Mostre que* $\|x\|_\infty$ *satisfaz as propriedades 1, 5, 8 e 9 do exercício* (1).
2. *Faça um esboço do conjunto* $B_\infty(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\|_\infty \leq 1\}$.

Exercício 6 *Um par de vetores* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *pertencentes ao* $\mathbb{R}^2$ *é dito linearmetne independente se a única solução da equação* $\alpha x + \beta y = 0$ *for* $\alpha = \beta = 0$.

1. *Mostre que* x, y *é um par linearmetne independente se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

2. *Reescreva esse resultado no caso de* 3 *vetores em* $\mathbb{R}^3$.
3. *Reescreva esse resultado no caso de* n *vetores em* $\mathbb{R}^n$.

Exercício 7 *Uma transformação linear entre os espaços* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *é uma função* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *que satisfaz as seguintes condições:*

- $L(x + y) = L(x) + L(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$
- $L(\lambda x) = \lambda L(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Considere* $A_{m\times n}$ *uma matriz real. Mostre que a função* $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definida por* $T_A(x) = A \cdot x$ *é uma transformação linear. (A notação* $A \cdot x$ *indica o produto usual de matrizes.)*
2. *Mostre que se* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é uma transformação linear, então existe uma matriz* $A_{m\times n}$ *tal que* $T_A(x) = A \cdot x$.
3. *Suponha* $n = m$. *Mostre que a transformação linear* $T_A(x) = A \cdot x$ *é injetiva se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

2 Funções de várias variáveis

Exercício 8 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}.$$

(a) *Obtenha o domínio* D_f *e faça um esboço;*

(b) *Calcule* $f(2, 3),\ f(a + b, a - b)$

Exercício 9 *Considere* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = 3x + 2y.$$

Calcule os seguintes valores

(a) $f(1, -1)$

(b) $f(a, x)$

(c) $\dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

(d) $\dfrac{f(x, y+h) - f(x, y)}{k}$

Exercício 10 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}.$$

Obtenha o domínio D_f *e faça um esboço;*

Exercício 11 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}.$$

Obtenha o domínio D_f *e faça um esboço;*

Exercício 12 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$$

Obtenha o domínio D_f *e faça um esboço;*

Exercício 13 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \frac{x - y}{sen(x) - sen(y)}$$

Obtenha o domínio D_f *e faça um esboço;*

Exercício 14 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

Obtenha o domínio D_f *e faça um esboço;*

Exercício 15 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$$

Obtenha o domínio D_f *e faça um esboço;*

Exercício 16 *Uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é dita homogênea de grau* λ *se*

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y),$$

para todo $t > 0$ *em todos os pontos* $(x, y) \in A$ *tais que* $(tx, ty) \in A$.

Verifique que as seguintes funções são homogênas e obtenha o grau.

(a) $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y^2$

(b) $f(x, y) = \dfrac{xe^{\frac{x}{y}}}{x^2 + y^2}$

Exercício 17 *Desenhe as curvas de nível da função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = x^2 + y^2$*. Esboce o gráfico de* f*.*

Exercício 18 *Considere* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

(a) Determine o domínio e a imagem de f*.*

(b) Desenhe as curvas de nível.

(c) Esboce o gráfico.

Exercício 19 *Desenhe as curvas de nível.*

(a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

(a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

(a) $f(x, y) = (x - y)^2$, $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

2.1 Desafios

Exercício 20 *Suponha que* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma função linear (veja exercício (7)). Supondo que* $f(1, 0) = 2$ *e* $f(0, 1) = 3$*, obtenha* $f(x, y)$*.*

Exercício 21 *Suponha que* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *seja uma função homogênea tal que*

$$f(a, b) = 0, \ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ \ \textit{tal que} \ \ a^2 + b^2 = 1. \tag{1}$$

(a) Qual o signficado geométrico de (1)?

(b) Mostre que $f(x, y) = 0$*, para qualquer* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*.*

Exercício 22

Definição 1 *Sejam* f *uma função com domininο* $D_f\mathbb{R}^2$ *e* $A \subset D_f$*. Dizemos que* $(x_0, y_0) \in A$ *é um ponto de mínimo de* f *em* A *se vale*

$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y), \ \forall (x, y) \in A.$$

(a) Qual deve ser a definição de ponto de máximo?

(b) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = 2x + y$ *e o conjunto*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 = 1\}$$

Utilizando argumentos geométricos, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f *em* A*.*

Exercício 23 *Duas superfícies de nível de uma função podem se interceptar?*