`Cálculo 2`

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 2: Curvas`

---

1 Curvas

Exercício 1 *Calcule os limtes* $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)$.

(a) $\gamma(t) = \left(\dfrac{sen(t)}{t}, t^2+1\right)$, $t_0 = 0$.

(b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t-1}}{t-1}, t^2, \dfrac{t-1}{t}\right)$, $t_0 = 1$.

(c) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^3-8}{t^2-4}, \dfrac{cos(\pi/t)}{t-2}, 2t\right)$, $t_0 = 2$.

(d) $\gamma(t) = \left(\dfrac{tg(3t)}{t}, \dfrac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right)$, $t_0 = 0$.

Exercício 2 *Considere a curva* $\gamma(t) = (sen(3t), e^{t^2}, t)$. *Calcule* $\gamma'(t)$ *e* $\gamma'(0)$.

Exercício 3 *Considere a curva* $\gamma(t) = (t, t, t^2)$. *Obtenha a reta tangente ao traço de* γ *no ponto* $\gamma(1)$.

Exercício 4 *Sejam* $\gamma, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ *duas curvas satisfazendo a igualdade*

$$\gamma'(t) = \beta'(t),\ \forall t \in I.$$

Mostre que existe um vetor $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *tal que*

$$\gamma(t) = \beta(t) + c.$$

Exercício 5 *Considere uma função diferenciável* $f : I_1 \to I_2$, *entre intervalos* I_1 *e* I_2. *Suponha que* $\gamma : I_2 \to \mathbb{R}^n$ *é uma curva diferenciável.*

(a) *Mostre que a curva* $\gamma \circ I_1 \to \mathbb{R}^n$, *definida por*

$$(\gamma \circ f)(t) = \gamma(f(t))$$

é diferenciável.

(b) *Mostre que*

$$(\gamma \circ f)'(t) = \gamma'(f(t)) \cdot f'(t).$$

Obs: aqui $\cdot$ *indica o produto de vetor por escalar.*

Exercício 6 *Calcule as seguintes integrais:*

(a) $\int_0^1 \gamma(t)dt$, *sendo* $\gamma(t) = (t, e^t)$.

(b) $\int_{-1}^1 \gamma(t)dt$, *sendo* $\gamma(t) = \left(sen(3t), \dfrac{1}{1+t^2}, 1\right)$.

Exercício 7 *Considere* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *uma curva contínua e define a curva* $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *pondo*

$$\beta(t) = \int_a^t \gamma(s)ds.$$

Mostre que $\beta'(t) = \gamma(t)$, *para todo* $t \in [a,b]$.

Exercício 8 *Calcule o comprimento das seguintes curvas*

(a) $\gamma(t) = (tcos(t), tsen(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\gamma(t) = (e^{-t}cos(t), e^{-t}sen(t), e^{-t})$, $t \in [0,1]$.

Exercício 9 *Considere* $r : I \to \mathbb{R}^3$ *uma curva definida num intervalo* I *e derivável até segunda ordem. Suponha que* r *denota a posição de uma partícula* P *num dado instante* $t \in I$. *Considere as curvas* $v(t) = r'(t)$ *e* $a(t) = v'(t)$, *definidas em* I.

(a) *Se* $\|v(t)\| = k$, *para todo* $t \in I$ *e uma constante* $k > 0$, *prove que*

$$\langle v(t), a(t) \rangle = 0, \ \forall t \in I.$$

(b) *Como é possível calcular o deslocamento dessa particula num intervalo* $[a,b] \subset I$*?*

Exercício 10 *Uma partícula desloca-se no espaço com equações paramétricas* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *e* $z = z(t)$ *de tal forma que*

$$x'(t) = \sqrt{2}, \ y'(t) = \sqrt{2} \ \text{ e } \ z''(t) = -2.$$

Sabe-se ainda que $z'(0) = 2$ *e que* $(x(0), y(0), z(0)) = (0,0,0)$.

(a) *Qual a posição da partícula num instante* t*?*

(b) *Determine o instante* T *no qual a partícula volta a tocar o plano* xy.

(c) *Qual o espaço percorrido entre os instantes* $t = 0$ *e* $t = T$*?*

Exercício 11 *Dê um exemplo de duas curvas* γ *e* β *que possuem o mesmo traço, ou seja,* $Im(\gamma) = Im(\beta)$, *mas possuem comprimentos distintos.*

Exercício 12 *Sejam* a *e* b *dois números reais, com* $a > 0$ *e* $b < 0$. *Considere a curva* $\gamma(t) = (ae^{bt}cos(t), ae^{bt}sen(t))$ *definida em* $\mathbb{R}$.

(a) *Mostre que quando* $t \to \infty$, *tem-se* $\gamma(t) \to 0$.

(b) *Faça um esboço do traço de* γ;

(c) Mostre que $\gamma'(t) \to (0,0)$*, quando* $t \to \infty$ *e, além disso, o limite*

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\gamma'(t)| dt$$

é finito. Isso significa que γ *tem comprimento finito no intervalo* $[t_0, \infty)$.

Exercício 13 *Sejam* $\gamma, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ *duas curvas tais que*

$$\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = 0 \quad e \quad \|\beta(t)\| \leq M.$$

Mostre que $\lim_{t \to t_0} \langle \gamma(t), \beta(t) \rangle = 0$.