Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 3: Limites de funções de várias variáveis

Exercício 1 *Verifique se existem os limites*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Exercício 2 *Verifique em quais pontos as funções abaixo são contínuas*

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Exercício 3 *Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(a) Mostre que f não é contínua em $(0,0)$.

(b) Dado $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcule

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}.$$

(c) *Dado $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcule*

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}.$$

Exercício 4 *Repita os itens (b) e (c) do exercício acima para as funções do exercício (2).*

Exercício 5 *Suponha que*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = a$$

e que $g : Dom_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo

$$\lim_{t \to a} g(t) = L,$$

sendo g não definida no ponto a e $Im_f \subset Dom_g$.

(a) *Mostre que*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} (g \circ f)(x,y) = \lim_{t \to a} g(t) = L.$$

(b) *Utilize este resultado para calcular*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Exercício 6 *Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)}, & se \quad x^2 + y^2 < 1, \\ 0, \quad se \quad x^2 + y^2 \geq 1, \end{cases}$$

Calcule

$$\lim_{(x,y) \to \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2 - 1}$$