Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4: Derivadas Parciais

Exercício 1 *Verifique em quais pontos as funções abaixo são possuem derivadas parciais*

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Exercício 2 *Calcule as derivadas parciais das funções abaixo*

(a) $f(x,y) = e^{xyz}$;

(b) $f(x,y) = xe^{x-y-z}$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$.

Exercício 3 *Mostre que a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

admite derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é contínua neste ponto.

Exercício 4 *Considere a função*

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Mostre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y)$$

Exercício 5 *Suponha* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável tal que* $\phi'(1) = 4$. *Considere ainda a função* $g(x, y) = \phi(x/y)$, *com* $y \neq 0$.

(a) *Calcule* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

(b) *Calcule* $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

(a) *Mostre que*

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercício 6 *Suponha* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável tal que* $\phi'(3) = 4$. *Considere ainda a função* $g(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$. *Calcule*

(a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$

(b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$

(a) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

Exercício 7 *Considere a função*

$$f(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2} dt.$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Exercício 8 *Suponha que uma função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *satisfaça as seguintes condições:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Mostre que* f *é constante.*

Exercício 9 *Considere a função*

$$f(x, y) = x^{x^{x^{x^y}}} + \ln(x)(arctg(arctg(arctg(sen(cos(xy)) - \ln(x + y))))).$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, y)$.

Exercício 10 *Considere a função*

$$F(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right).$$

Mostre que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Exercício 11 *Dizemos que* (x_0, y_0) *é um ponto crítico de uma função* $f = f(x, y)$ *se*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Determine, caso existam, os pontos críticos das funções abaixo.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - y$

(c) $f(x, y) = 2x + y^3$

DESAFIOS

Exercício 12 *Seja* $p = (x_0, y_0)$ *um ponto no domínio de uma função* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* (x_0, y_0) *é um ponto de máximo local de* f *se existe uma bola* B *de centro* p *contida em* A *tal que.*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \ \forall (x, y) \in B \cap A.$$

Dizemos que (x_0, y_0) *é um ponto de mínimo local de* f *se existe uma bola* B *de centro* p *contida em* A *tal que.*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \ \forall (x, y) \in B \cap A.$$

Supondo que f *possua derivadas parciais em* (x_0, y_0) *mostre que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Obs: A grosso modo, esse exercício diz que: Ponto de máximo (ou mínimo) implica em derivadas parciais nulas.

Exercício 13 *Considere* f *uma função complexa* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- *escrevendo* $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, *podemos identificar* A *como um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$;
- *podemos escrever*
$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$
sendo $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- *a derivada de* f *num ponto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *quando existe, é definida por*
$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Obs: Essas igualdades definem as chamadas equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$