Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5: Funções Diferenciáveis

Exercício 1 *Suponha que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes condições:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é constante.

Exercício 2 *Considere a função*

$$F(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right).$$

Mostre que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Exercício 3 *Determine os pontos nos quais as funções abaixo são diferenciáveis.*

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Exercício 4 *Considere $f = f(x, y)$ definida em todo o $\mathbb{R}^2$, diferenciável em $(0, 0)$ e ainda*

$$f(tx, ty) = tf(x, y), \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x, y) = ax + by$.

Exercício 5 *Considere*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & se \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

(a) *Mostre que*
$$f(tx,ty)=tf(x,y),\ \forall t\in\mathbb{R},\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(b) *Em virtude do exercício (4), podemos dizer se f é ou não diferenciável em $(0,0)$?*

Exercício 6 *Considere uma função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciável num ponto (x_0,y_0). O* ***plano tangente*** *ao gráfico de f no ponto $(x_0,y_0,f(x_0.y_0))$ é o conjunto dos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que*
$$z-f(x_0,y_0)=(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Por outro lado, a ***reta normal*** *ao gráfico de f no ponto $(x_0,y_0,f(x_0.y_0))$ é dada por*
$$(x,y,z)=(x_0,y_0,f(x_0.y_0))+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1\right),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Obtenha o plano tangente e a reta normal ao gráfico da função $f(x,y)=3x^2y-x$ no ponto $(1,2,f(1,2))$.

Exercício 7 *Obtenha a equação do plano tangente a função $f(x,y)=2x^2y$ no ponto $(1,1,2)$.*

Exercício 8 *Considere as funções*
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & caso\ contrário.\end{cases}\qquad e\ \ g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & caso\ contrário.\end{cases}$$

(a) *Estude a continuidade das duas funções.*

(b) *Estude a diferenciabilidade das duas funções.*

Exercício 9 *A função $z=z(x,y)$ é dada implicitamente pela equação*
$$f\left(\frac{x}{y},z\right)=0,$$
sendo $f=f(u,v)$ diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\neq 0$. Mostre que
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Exercício 10 *Considere a função*
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & caso\ contrário.\end{cases}$$

Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para cada $v\in\mathbb{R}^n$, mas f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 11 *A equação $y^3+xy+x^3=4$ define implicitamente uma função $y=y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\frac{dy}{dx}$ tem termos de x e y.*

Exercício 12 *verifique que a equação $x^2y+sen(y)=x$ define implicitamente uma função $y=y(x)$. Expresse $\frac{dy}{dx}$ tem termos de x e y.*

Exercício 13 *Suponha que* $y = y(x)$ *seja diferenciável e dada implicitamente pela equção*

$$x = F(x^2 + y, y^2),$$

sendo $F = F(u, v)$ *uma função diferenciável. Expresse* $\frac{dy}{dx}$ *tem termos de* x, y *e das derivadas parciais de* F

DESAFIOS

Exercício 14 *Considere* f *uma função complexa* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *com* A *um conjunto aberto.*

- *escrevendo* $\mathbb{C} \ni z = x + iy$, *podemos identificar* A *como um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$;
- *podemos escrever*
$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$
sendo $u, v : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- *a derivada de* f *num ponto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *quando existe, é definida por*
$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$