Cálculo 2
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 6: Pontos críticos, polinômio de Taylor e multiplicadores de Lagrange

1 Pontos críticos

Exercício 1 *Determine os pontos de máximo e mínimo das funções abaixo:*

(a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$;

(b) $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$;

(c) $f(x, y) = x^5 + +y^5 - 5x + -5y$;

Exercício 2 *Determine o ponto do plano* $x + 2y - z = 4$ *que se encontra mais próximo da origem.*

Exercício 3 (Método dos mínimos quadrados) *Dados* n *pares de números* $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n)$, *com* $n \geq 3$, *em geral não existirá uma função real* $f(x) = \alpha x + \beta$ *cujo gráfico passe por todos esses* n *pontos. Entretanto, podemos determinar* f *de modo que a soma dos quadrados dos erros* $f(a_i) - b_i$ *seja mínima. Com base nessa informações determine* α *e* β *tais que a soma*

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [f(a_i) - b_i]^2$$

seja mínima.

Exercício 4 *Determine, pelo método dos mínimos quasrados, a reta que melhor se ajusta aos pontos:*

(a) $(1, 3), (2, 7)$ *e* $(3, 8)$;

(b) $(0, 1), (1, 3), (2, 3)$ *e* $(3, 4)$;

Exercício 5 *Determinado produto apresenta uma demanda* y *(em milhares) quando o preço, por unidade, é* x *(em reais). Foram observados os seguintes dados:*

x	y
5	100
6	98
7	95
8	94

(A tabela diz que ao preço unitário de 5 reais a demanda foi de 100.000 unidades....)

(a) *Determine, pelo método dos mínimos quasrados, a reta que melhor se ajusta aos dados observados.*

(b) *utilizando a reta encontrada no item a), faça uma previsão para a demanda quando o preço, por unidade, for 10 reais.*

Exercício 6 *Determinada empresa produz dois produtos cujas quandidade é representada por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_1, respectivamente, conforme as equações*

$$p_1(x) = 120 - 2x \quad e \quad p_2(x) = 200 - y.$$

O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y é dado por

$$C(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy.$$

Admitindo que toda a produção é vendida, determine a produção que maximiza o lucro.

2 Polinômio de Taylor

Exercício 7 *Determine os polinômios de Taylor de ordem 1 das funções abaixo em volta do ponto (x_0, y_0) dado.*

(a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(c) $f(x, y) = sen(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exercício 8 *Sejam $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $P(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 em volta do ponto $(0, 0)$.*

(a) *Mostre que se $x + 5y < 1$, então*

$$\left|e^{x+5y} - P(x, y)\right| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2$$

(b) *Avalie o erro que se comete na aproximação*

$$e^{x+5y} \approx P(x, y),$$

com $x = 0,01$ e $y = 0,01$.

Exercício 9 *Determine os polinômios de Taylor de ordem 2 das funções abaixo em volta do ponto (x_0, y_0) dado.*

(a) $f(x, y) = xsen(y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Exercício 10 *Sejam $P(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x, y) = xsen(y)$ em volta do ponto $(0, 0)$. Mostre que*

$$|f(x, y) - P(x, y)| < \frac{|y|^2}{2}\left[|x| + \frac{1}{3}|y|\right]$$

para todo (x, y) com $|x| < 1$.

Exercício 11 *Obtenha os pontos críticos das funções abaixo:*

(a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$.

(b) $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy = 5$.

(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$.

3 Multiplicadores de Lagrange

Exercício 12 *Estude a função dada com relação a máximos e mínimos no conjunto dado.*

(a) $f(x,y) = 3x - y$, *com*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0,\ y \geq 0,\ y - x \leq 3 \ \ e \ \ x + y \leq 4\}.$$

(b) $f(x,y) = 3x - y$, *com*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Exercício 13 *Determine* (x,y), *com* $x^2 + 4y^2 \leq 1$, *que maximiza a soma* $2x + y$.

Exercício 14 *Suponha que* $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ *represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0,\ y \geq x \ e \ \ x + 2y \leq 4\}.$$

Determine o ponto de A *de menor temperatura.*

Exercício 15 *Dê exemplo de uma função contínua num conjunto limitado que não possua valor máximo nesse conjunto.*

Exercício 16 *Estude a função dada com relação a máximos e mínimos segundo as restrições dadas.*

(a) $f(x,y) = 3x + y$, *com* $x^2 + 2y^2 = 1$.

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, *com* $3x + y = 1$.

Exercício 17 *Determine o ponto da reta* $x + 2y = 1$ *cujo produto das coordenadas seja máximo.*

DESAFIOS

Considere verdadeiro o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *no aberto* U. *Fixado* $a \in U$ *considere* $h = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a + h \in U$. *Neste caso:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + E(h,k),$$

sendo

$$E(h,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}, \overline{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}, \overline{y})k^2\right],$$

para algum $(\overline{x}, \overline{y})$ *no interior do segmento de extremidades* (x_0, y_0) *e* $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Exercício 18 *Seja* (x_0, y_0) *um ponto crítico de uma função* $f(x,y)$ *de classe* C^2 *numa bola* B *centrada em* (x_0, y_0). *Prove, utilizando o teorema acima, que para todo* $(x,y) \in B$, *existe* $(\overline{x}, \overline{y})$ *interno ao segmento de extremidades* (x_0, y_0) *e* (x,y) *tal que*

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x}, \overline{y}) \cdot (y - y_0)^2\right]$$

Exercício 19 *Sejam* $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$, *sendo* a, b, c, d, e *constantes, e* (x_0, y_0) *um ponto crítico de* f. *Utilizando o exercício anterior, resolva os seguintes problemas:*

(a) Mostre que

$$f(x + x_0, y + y_0) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2,\ \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Supondo $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então

$$f(x + x_0, y + y_0) > f(x_0, y_0)\ \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(c) Como é o gráfico de f?