`Cálculo 2`

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

`LISTA 7: Integrais duplas e triplas`

1 Integrais duplas

Exercício 1 *Calcule as integrais abaixo:*

(a) $\int\int_R (x+y)dxdy$, *sendo* R *o retângulo* $0 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq 1$.

(b) $\int_{-1}^{1}\int_0^2 xy^2 dxdy$.

(c) $\int_0^2\int_{-1}^{1} xy^2 dxdy$

(d) $\int\int_R ydxdy$, *sendo* R *o triângulo* $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(1,1)$.

Exercício 2 *Seja* R *o retângulo* $1 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq 1$. *Calcule* $\int\int_R f(x,y)dxdy$, *sendo* $f(x,y)d$ *dada por:*

(a) $x + 2y$

(b) $\sqrt{x+y}$

(c) $\sqrt{x+y}$

(d) $x - y$

(e) ee^{xy}

(f) $xsen(\pi y)$

Exercício 3 *Se* $f(x)$ *e* $g(y)$ *são duas funções contínuas nos intervalos* $[a,b]$ *e* $[c,d]$, *respectivametne, então*

$$\int\int_R f(x)g(y)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right),$$

sendo R *o retângulo* $a \leq x \leq b$ *e* $c \leq y \leq d$.

Utilize este fato para calcular as seguintes integrais

(a) $\int\int_R xy^2 dxdy$, *sendo* R *o retângulo* $1 \leq x \leq 2$ *e* $2 \leq y \leq 3$.

(b) $\int\int_R xcos(2y)dxdy$, *sendo* R *o retângulo* $0 \leq x \leq 1$ *e* $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$.

(c) $\int\int_R xye^{x^2-y^2}dxdy$, *sendo* R *o retângulo* $-1 \leq x \leq 1$ *e* $0 \leq y \leq 3$.

Exercício 4 *Inverta a ordem de integração nas integrais abaixo:*

(a) $\int_0^1 \left[\int_0^x dy\right] f(x,y)dx$.

(b) $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x dy\right] f(x,y)dx$.

(c) $\int_0^1 \left[\int_y^{y+3} dx\right] f(x,y)dy$.

(d) $\int_1^e \left[\int_{\ln(x)}^x dy\right] f(x,y)dx$.

Exercício 5 *A área de um conjunto* B *pode ser calculada através de*

$$A(B) = \int\int_B dxdy.$$

Calcule a área da região delimiada pelos gráficos das funções $f(x) = x$ *e* $g(x) = -x^2 + x + 1$, *sendo* $-1 \leq x \leq 1$.

Exercício 6 *Se* $f : B \subset \mathbb{R}^2$ *é uma função integrável, com* $f(x, y) \geq 0$ *em* B*, então o volume do conjunto*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in B \ e \ \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

é definido por

$$Vol(A) = \int\int_B f(x, y)dxdy.$$

Calcule os volumes dos conjunto abaixo.

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \ \ e \ \ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$

(b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \ \ e \ \ 0 \leq z \leq x + 2y\}$

(c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \ \ e \ \ 0 \leq z \leq xye^{x^2-y^2}\}$

(d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 \ \ e \ \ x + y \leq z \leq x + y + 2\}$

Exercício 7 *Calcule* $\int\int_B \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$*, sendo* B *o triângulo de vértices* $(0, 0)$*,* $(1, 0)$ *e* $(1, 1)$*.*

Exercício 8 *Calcule* $\int_0^1 \int_0^x x\sqrt{x^2 + 3y^2}dxdy$*.*

Exercício 9 *Calcule as integrais abaixo:*

(a) $\int\int\int_R xyzdxdydz$*, sendo* R *o paralelepípedo* $0 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq 1$ *e* $1 \leq z \leq 2$*.*

(b) $\int\int\int_R \sqrt{1 - z^2}dxdydz$*, sendo* R *o paralelepípedo* $0 \leq x \leq 1$ *e* $0 \leq y \leq 1$ *e* $0 \leq z \leq 1$*.*

(c) $\int\int\int_R e^{x^2}dxdydz$*, sendo* R *dado por* $0 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq x$ *e* $1 \leq z \leq 1$*.*

(d) $\int\int\int_R xdxdydz$*, sendo* R *dado por* $0 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq 1$ *e* $x + y \leq z \leq x + y + 1$*.*

(b) $\int\int\int_R \sqrt{1 - z^2}dxdydz$*, sendo* R *o paralelepípedo* $0 \leq x \leq 1$ *e* $0 \leq y \leq z$ *e* $0 \leq z \leq 1$*.*

(c) $\int\int\int_R e^{x^2}dxdydz$*, sendo* R *dado por* $0 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq x$ *e* $1 \leq z \leq 1$*.*