CMM 042 - Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PROVA 1 - 13/09/2019

- Não serão aceitas respostas sem justificativas;
- A maior nota possível é 100 pontos;
- Não é necessário responder com caneta;

Exercício 1 *(30 pontos) Sejam a e b dois números reais, com $a > 0$ e $b < 0$. Considere a curva $\gamma(t) = (ae^{bt}cos(t), ae^{bt}sen(t))$ definida em $\mathbb{R}$.*

(a) Mostre que quando $t \to \infty$, tem-se $\gamma(t) \to 0$.

(b) Faça um esboço do traço de γ;

(c) Mostre que $\gamma'(t) \to (0,0)$, quando $t \to \infty$, e que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\gamma'(t)|dt \quad \text{é finito.}$$

Exercício 2 *(20 pontos) Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ e a função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = (x-y)^2$. Obtenha e esboce as curvas de nível para os seguintes casos:*

(a) $c = 0$; *(b) $c = 1$;* *(c) $c > 0$;*

Exercício 3 *(20 pontos) Estude os seguintes limites:*

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; *(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{y-x^3}$;*

Exercício 4 *(10 pontos) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,y)$, sendo*

$$f(x,y) = x^{x^{x^{x^y}}} + \ln(x)(arctg(arctg(arctg(sen(cos(xy)) - \ln(x+y))))).$$

Exercício 5 *(30 pontos) Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em todos os pontos $(x,y) \neq (0,0)$;

(b) Mostre que f não é contínua em $(0,0)$.

(c) Calcule as derivadas parciais de f em todos os pontos do seu domínio.

Exercício 6 *(10 pontos) Sejam $\gamma, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ duas curvas satisfazendo a igualdade*

$$\gamma'(t) = \beta'(t),\ \forall t \in I.$$

Mostre que existe um vetor $c = (c_1, \ldots, c_n)$ tal que

$$\gamma(t) = \beta(t) + c,\ \forall t \in I.$$