CMM 042 - Cálculo 2

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PROVA 2 - 01/11/2019

Exercício 1 *(20 pontos) Determine os pontos nos quais a função abaixo é diferenciável.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \textit{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exercício 2 *(40 pontos) A função $z = z(x,y)$ é dada implicitamente pela equação*

$$f\left(\frac{x}{y}, z\right) = 0,$$

sendo $f = f(u,v)$ diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \neq 0$. Mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Exercício 3 *(20 pontos) Obtenha os pontos de máximo e mínimo da função abaixo restrita ao conjunto dado.*

$$f(x,y) = 3x - y \quad \textit{com} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Exercício 4 *(30 pontos) Determinado produto apresenta uma demanda y (em milhares) quando o preço, por unidade, é x (em reais). Foram observados os seguintes dados:*

x	y
5	100
6	98
7	95
8	94

(a) Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados observados.

(b) Utilizando a reta encontrada no item a), faça uma previsão para a demanda quando o preço, por unidade, for 10 reais.

Exercício 5 *(20 pontos) Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com $1\,m^3$ de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.*

MÍNIMOS QUADRADOS:

Dados n pares de números $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_n, b_n)$, com $n \geq 3$, em geral não existirá uma função real $f(x) = \alpha x + \beta$ cujo gráfico passe por todos esses n pontos. Entretanto, podemos determinar f de modo que a soma dos quadrados dos erros $f(a_i) - b_i$ seja mínima. A ideia para resolver tal problema consiste em minimizar a função $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{n} [f(a_j) - b_j]^2,$$

ou seja, determinar $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que resolve o problema $\nabla E(\alpha, \beta) = (0, 0)$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} \alpha A + \beta B = C \\ \alpha D + n\beta = E \end{cases}$$

sendo

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j^2, \;\; B = \sum_{j=1}^{n} a_j, \;\; C = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j, \;\; D = \sum_{j=1}^{n} a_j \text{ e } \;\; E = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS:

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

Teorema 1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $a \in A$ um ponto crítico.*

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a é um ponto de **mínimo** local;*

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ *e* $\det H_f(a) > 0 \;\Rightarrow\;$ *a é um ponto de **máximo** local;*

(c) $\det H_f(a) < 0 \;\Rightarrow\;$ *a **não** é ponto de máximo e **nem** mínimo local;*

(d) *Se* $\det H_f(a) = 0$, *então nada pode ser afirmado.*