de 2 e de 5, então o número racional $a/b$, $a$ e $b$ primos entre si, não terá uma representação decimal finita.)

A parte *se* da preposição afirma: se o inteiro $b$ não tiver outros fatores primos além de 2 e 5, então o número racional $a/b$, $a$ e $b$ primos entre si, terá uma representação decimal finita. Para demonstrar a parte *se*, devemos começar com uma fração irredutível qualquer, $a/b$, supor que $b$ tenha, no máximo, os fatores primos 2 e 5, e demonstrar que a fração decimal correspondente é do tipo finito. Consideremos, inicialmente, um exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{9741}{3200} = \frac{9741}{2^7 \cdot 5^2}.$$

Para obtermos a representação decimal desse número, basta transformarmos a fração $a/b$ em outra, que tenha por denominador uma potência de 10. Isso pode ser feito, multiplicando o numerador e o denominador por $5^5$:

$$\frac{9741}{2^7 \cdot 5^2} = \frac{9741 \cdot 5^5}{2^7 \cdot 5^7} = \frac{30440625}{10^7} = 3,0440625.$$

Podemos passar desse exemplo para o caso geral, da seguinte maneira. Suponhamos que $b$ seja da forma $2^m \cdot 5^n$, com $m$ e $n$ inteiros positivos ou nulos. Então, de duas uma: ou $n$ é menor do que ou igual a $m(n \leq m)$, ou então, $n$ é maior do que $m(n > m)$. Se $n \leq m$, multiplicaremos o numerador e o denominador da fração por $5^{m-n}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m}.$$

Sendo $m-n$ positivo ou nulo, $5^{m-n}$ será um inteiro e, portanto, $a \cdot 5^{m-n}$ também será um inteiro, digamos $c$. Podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^m},$$

e, como a divisão do inteiro $c$ por $10^m$ requer apenas que coloquemos a vírgula no lugar correto, obteremos para $a/b$ uma representação decimal finita.

Por outro lado, se $n > m$, multiplicaríamos o numerador e o denominador de $a/b$ por $2^{n-m}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}.$$



Escrevendo $d$ no lugar de $a \cdot 2^{n-m}$, obteremos

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^n},$$

e assim, novamente teremos, para $a/b$, uma representação decimal finita.

## Problemas – Lista 6

1. Escreva, em notação decimal finita, as seguintes frações

   (a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{3}{200}$, (c) $\frac{321}{400}$, (d) $\frac{7}{625}$, (e) $\frac{352}{125}$, (f) $\frac{3149}{2500}$.

## 2.3 As diversas maneiras de enunciar e demonstrar proposições

Estivemos usando a frase "se, e somente se", sem lhe ter dado uma definição precisa.

Por isso, neste ponto, faremos uma pausa em nossa exposição sobre números racionais, para esclarecer um pouco a linguagem usada na formulação de sentenças matemáticas e, também, a relação dessa linguagem com a lógica subjacente. Existem, em matemática, dois tipos básicos de afirmações ou proposições:

Se $A$, então $B$.

Se $A$, então $B$ e reciprocamente.

Vamos examinar cada uma delas.

Quando, como na Seção 1.5, dizemos "se $m$ e $n$ forem inteiros pares, então $mn$ será par", temos uma proposição do tipo "se $A$, então $B$". Essa proposição pode ser formulada de muitas maneiras, como se vê na seguinte lista:

*Maneiras de formular "Se A, então B"*

1. Se $A$ for verdadeiro, então $B$ será verdadeiro.
2. Se $A$ for válido, então $B$ será válido.

3. $A$ implica $B$.

4. $B$ é implicado por $A$.

5. $B$ segue de $A$.

6. $A$ é uma condição suficiente para $B$.

7. $B$ é uma condição necessária para $A$.

8. $B$ é verdadeiro desde que $A$ seja verdadeiro.

9. $B$ é verdadeiro se $A$ for verdadeiro.

10. $A$ será verdadeiro somente se $B$ for verdadeiro.

11. É impossível, ao mesmo tempo, termos $A$ verdadeiro e $B$ falso.

12. Se $B$ for falso, então $A$ será falso.

Essa lista contém somente as formas mais usuais e não é completa, pois, na verdade, não há limites para as possíveis formulações da proposição. Algumas formulações, como (6) e (7), por exemplo, nem serão usadas neste livro. Todas, salvo (12), podem ser consideradas como definições dos termos "implica", "condição necessária, "condição suficiente" e "somente se".

Consideremos (10), por exemplo, que define o uso técnico, em matemática, do termo "somente se". Substituindo os símbolos $A$ e $B$ pelas afirmações a respeito de $m$ e $n$, feitas anteriormente, podemos concluir que as duas proposições abaixo transmitem, ambas, a mesma informação.

"Se os inteiros $m$ e $n$ forem pares, então o inteiro $mn$ será par".

"Os inteiros $m$ e $n$ serão pares somente se o inteiro $mn$ for par".

O leitor, acostumado com o uso, dia a dia, da palavra "somente", pode não sentir que as proposições acima transmitam a mesma informação. Nesse caso, deverá se conscientizar da distinção entre linguagem técnica da matemática e o uso diário do português. Apesar de essas linguagens terem muito em comum, existem diferenças acentuadas, como no exemplo em questão. (Uma pessoa, hábil no uso matemático da linguagem, poderá optar por



ela como sua linguagem do dia a dia. Correrá, porém, o risco de parecer pedante, afetada ou emproada aos olhos do cidadão comum.)

O que foi dito até agora sobre as formulações de "se $A$, então $B$" é que as formas (1) até (11) são baseadas apenas em convenções quanto ao uso da linguagem em matemática. A forma (12) é diferente, pois envolve um axioma fundamental da Lógica (conhecido como *princípio do terceiro excluído*) que afirma que, ou $A$ é verdadeiro, ou $A$ é falso, onde $A$ é qualquer proposição passível de análise. Em essência, o axioma exclui qualquer estado intermediário entre a veracidade e a falsidade de $A$. Aceitamos esse axioma e provemos que as formas (1) e (12) transmitem a mesma informação.

Para isso devemos provar que (1) implica (12) e, reciprocamente, que (12) implica (1). Inicialmente, suponhamos (1) e examinamos (12):

"Se $B$ for falso, então $A$ será falso". Seria possível que essa conclusão fosse falsa, devendo ser "$A$ será verdadeiro"? Se esse fosse o caso, então usando (1) poderíamos concluir que $B$ seria verdadeiro, mas isso contradiz a hipótese de (12). Portanto, a conclusão "$A$ será falso" é correta.

Reciprocamente, suponhamos (12) e provemos (1):

"Se $A$ for verdadeiro, então $B$ será verdadeiro".

Perguntamos se essa conclusão pode estar errada; será que deveria ser "$B$ será falso"? Se assim fosse, usando (12), concluiríamos que $A$ seria falso, mas isso contradiz a hipótese de (1). Portanto, "$B$ será verdadeiro" é a conclusão correta.

As formas (11) e (12) mostram a natureza da demonstração indireta. Suponhamos querer demonstrar a proposição "se $A$, então $B$". Uma demonstração direta é aquela em que supomos $A$, ou aceitamos $A$, e deduzimos $B$. Mas, examinando (11), vemos que é possível fazer uma demonstração, supondo a veracidade de $A$ e a falsidade de $B$ e deduzir, então, uma contradição. Essa seria uma demonstração indireta. Pode-se detectar esse tipo de demonstração observando as hipóteses formuladas; em geral requer-se, de início, que a proposição a ser provada seja suposta falsa. Demonstrações indiretas também podem ser detectadas pela linguagem usada no fim da demonstração, como "... e assim chegamos a uma contradição e o teorema está provado".

Uma outra forma de demonstração indireta é sugerida por (12). Para provar "se $A$, então $B$", podemos supor que $B$ seja falso e deduzir, então, que $A$ será falso. As três formas de demonstração, que acabamos de identificar, são:

Suponha $A$, deduza $B$ (demonstração direta).

Suponha $A$ verdadeiro e $B$ falso, deduza uma contradição (uma forma de demonstração indireta).

Suponha $B$ falso, deduza que $A$ será falso (outra forma de demonstração indireta).

Um fato curioso, quanto à maneira de como livros de matemática são escritos (este, inclusive), é que as três formas de demonstração são usadas livremente, muitas vezes sem nenhuma indicação clara quanto à forma de demonstração que está sendo usada em dado momento. Espera-se, de fato, que o leitor decifre uma pequena charada, identificando, para acompanhar o raciocínio, a forma de demonstração que está sendo usada. Em geral, isso não oferece dificuldade e o leitor consegue detectar quais foram as hipóteses feitas pelo autor no início da demonstração.

Consideremos, a seguir, o segundo tipo de proposição matemática:

"Se $A$, então $B$ e reciprocamente",

mencionado no começo desta seção. As palavras *e reciprocamente* significam "se $B$, então $A$" e esse é o *recíproco* de "se $A$, então $B$". Provavelmente o leitor está ciente de que uma afirmação e sua recíproca são duas coisas diferentes. Uma pode ser verdadeira e a outra falsa; ambas podem ser verdadeiras ou ambas podem ser falsas, dependendo das circunstâncias. Por exemplo, a afirmação: "se $m$ e $n$ forem pares, então $mn$ será par" é verdadeira, enquanto a sua recíproca, se $mn$ for par, então $m$ e $n$ serão pares", é falsa.

Analogamente ao que fizemos com a lista anterior, indicaremos as várias maneiras de formular "se $A$, então $B$ e reciprocamente":

Se $B$, então $A$ e reciprocamente.

$A$ é verdadeiro se, e somente se, $B$ for verdadeiro.

$B$ é verdadeiro se, e somente se, $A$ for verdadeiro.

$A$ é falso se, e somente se, $B$ for falso.

$B$ é falso se, e somente se, $A$ for falso.

$A$ implica $B$ e reciprocamente.

$B$ implica $A$ e reciprocamente.



$A$ é uma condição necessária e suficiente para $B$.

$B$ é uma condição necessária e suficiente para $A$.

$A$ e $B$ são proposições equivalentes.

Todas essas afirmações têm o mesmo significado.

Observemos a grande variedade de formas de demonstração da proposição "se $A$, então $B$ e reciprocamente". Como vimos anteriormente, existem basicamente três formas de demonstração para proposições do tipo "se $A$, então $B$". Analogamente, para a demonstração de "se $B$, então $A$". Sendo possível combinar qualquer uma das três formas usadas na primeira parte da demonstração com qualquer uma das formas usadas na segunda parte, existem nove possíveis caminhos para demonstrar "se $A$, então $B$ e reciprocamente". Talvez o mais comum seja o da demonstração direta em ambas as direções, isto é,

1. Suponha $A$, deduza $B$.
2. Suponha $B$, deduza $A$.

Um outro caminho, muito usado, é

1. Suponha $A$, deduza $B$.
2. Suponha $A$ falso, deduza que $B$ será falso.

Em demonstrações mais complexas, esses caminhos são, muitas vezes, combinados. Uma demonstração de "se $A$, então $F$" pode ser feita através de uma cadeia de proposições: "se $A$, então $B$", "se $B$, então $C$", "se $C$, então $D$", "se $D$, então $E$", "se $E$, então $F$". Nesse caso, cada proposição implica a seguinte. Se cada proposição e sua recíproca puderem ser demonstradas por um dos caminhos descritos, então também teremos: "se $F$, então $E$", "se $E$, então $D$", "se $D$, então $C$", "se $C$, então $B$", "se $B$, então $A$", de modo que a recíproca, "se $F$, então $A$", da proposição original, será também verdadeira. Quando um autor diz: "a recíproca pode ser demonstrada, invertendo as passagens feitas", é isso que ele tem em mente.

Todas essas formas de demonstrações podem ser encontradas em livros de matemática e, como já dissemos, o autor muitas vezes se embrenha na demonstração de um teorema sem declarar explicitamente que forma estará usando. O autor espera que o leitor descubra por si só a natureza da técnica de demonstração que está sendo apresentada.

## Problemas – Lista 7

1. Demonstre que a afirmação: "se $mn$ for par, então $m$ e $n$ serão pares" é falsa.

2. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas? O número racional $a/b$, $a$ e $b$ primos entre si, tem uma representação finita

   (a) se, e somente se, $b$ não for divisível por outro primo além de 2;

   (b) se $b$ não for divisível por outro primo além de 2;

   (c) somente se $b$ não for divisível por outro primo além de 2;

   (d) se, e somente se, $b$ não for divisível por 3;

   (e) se $b$ não for divisível por 3;

   (f) somente se $b$ não for divisível por 3.

3. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas? O número racional $a/b$ tem uma representação decimal finita

   (a) se, e somente se, $b$ não tiver outros fatores primos além de 2 e 5;

   (b) se $b$ não tiver outros fatores primos além de 2 e 5;

   (c) somente se $b$ não tiver outros fatores primos além de 2 e 5. *Sugestão:* observe que não foi especificado estar $a/b$ na forma irredutível.

4. Um livro recente de Álgebra[3] usa a seguinte proposição como axioma: "$ab = 0$ somente se $a = 0$ ou $b = 0$". Reescreva a proposição na forma "se $A$, então $B$".

[3] W.W. Sawyer. *A Concrete Approach to Abstract Algebra*, p. 30.



5. (a) Demonstre: "se $\beta$ (beta) for um número racional, então $\beta^2$ também será racional".

   (b) Isso equivale a demonstrar "se $\beta^2$ for irracional, então $\beta$ também será irracional"?

## 2.4 Dízimas periódicas

Voltemos ao tópico dos números racionais. Separamos os números racionais em dois tipos, a saber, os que têm uma representação decimal finita e os que têm uma representação decimal infinita. Podemos agora demonstrar que tais representações decimais infinitas possuem um grupo de algarismos que se repete indefinidamente como, por exemplo,

$$\frac{5}{11} = 0,454545\ldots \quad \text{e} \quad \frac{3097}{9900} = 0,31282828\ldots$$

Por conveniência, usaremos a notação habitual para indicar uma dízima periódica, isto é, usaremos uma barra sobre a parte que se repete:

$$\frac{5}{11} = 0,\overline{45}; \quad \frac{3097}{9900} = 0,31\overline{28}; \quad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}; \quad \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}; \quad etc.$$

Pode-se ver o porquê da repetição dos algarismos, considerando, por exemplo, a conversão usual da fração ordinária 2/7 em fração decimal:

$$\begin{array}{l|l} 2,000000 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{14} & 0,285714 \\ \ \ 60 & \\ \ \ \underline{56} & \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \underline{35} & \tfrac{2}{7} = 0,\overline{285714} \\ \ \ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ \underline{49} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{7} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{28} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$