Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1 - Conjuntos e Funções

1 Conjuntos

Exercício 1 *Prove que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.*

Exercício 2 *Sejam $A, B \subset E$. Prove que:*

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c,$$
$$A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B.$$

Exercício 3 *Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.*

Exercício 4 *Dê um exemplo de conjuntos A, B e C tais que $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$.*

Exercício 5 *Se $A, X \subset E$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = E$, então $X = A^c$.*

Exercício 6 *Prove as seguintes afirmações:*

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

(d) $A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'$;

Exercício 7 *Sejam L e M dois conjuntos de índices e duas famílias de conjuntos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$,*

$$\{A_\lambda \cup B_\mu\}_{(\lambda,\mu) \in L \times M} \quad e \quad \{A_\lambda \cap B_\mu\}_{(\lambda,\mu) \in L \times M}.$$

(a) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são finitos;

(b) Exiba um exemplo para o caso em que L e M são infinitos;

(c) Prove as seguintes igualdades

$$\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \bigcap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \bigcup \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda,\mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

Exercício 8 *Seja $\{A_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N} \times N}$ uma família de conjuntos com índices em $\mathbb{N} \times N$. Exiba uma demonstração, ou um contra-exemplo, para a seguinte igualdade:*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right)$$

Exercício 9 *Para cada elemento* $n \in \mathbb{N}$ *defina* $A_n = \{(n+1)k,\ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

(a) Determine $A_1 \times A_2$;

(b) Determine

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad e \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Exercício 10 *Dada uma sequência de conjuntos* $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$, *considere os conjuntos*

$$\limsup A_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \quad e \quad \liminf A_n \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right).$$

(a) Prove que $\limsup A_n$ *é o conjunto dos elementos que pertencem a* A_n *para uma infinidade de valores de* n;

(b) Prove que $\liminf A_n$ *é o conjunto dos elementos que pertencem a todo* A_n, *salvo para uma quantidade finita de de valores de* n;

(c) Prove que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

(d) Se $A_n \subset A_{n+1}$ *para todo* n, *então*

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \cup_{i=n}^{\infty} A_n.$$

(e) Se $A_{n+1} \subset A_n$ *para todo* n, *então*

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \cap_{i=n}^{\infty} A_n.$$

(f) Exiba um exemplo em que $\liminf A_n \neq \limsup A_n$;

2 Funções

Exercício 11 *Dados conjuntos* A *e* B, *suponha que existam funções injetivas* $f : A \to B$ *e* $g : B \to A$. *Prove que existe uma bijeção* $h : A \to B$.

Exercício 12 *Considere uma função* $f : X \to Y$. *Mostre que* f *é injetiva se, e somente se, existe uma função* $g : Y \to X$ *tal que* $g \circ f$ *é a função identidade de* X, *ou seja,* $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in X$.

Exercício 13 *Considere uma função* $f : X \to Y$. *Mostre que* f *é sobrejetiva se, e somente se, existe uma função* $g : Y \to X$ *tal que* $g \circ f$ *é a função identidade de* Y, *ou seja,* $(f \circ g)(y) = y, \forall y \in Y$.

Exercício 14 *Considere uma função* $f : X \to Y$, *conjuntos* $A \subset X$ *e* $B \subset Y$.

(a) Mostre que $f[f^{-1}[B]] \subset B$ *e* $f^{-1}[f[A]] \supset A$;;

(b) Mostre um exemplo onde não vale $f[f^{-1}[B]] = B$, *ou* $f^{-1}[f[A]] = A$;

(c) Mostre que se f *é sobrejetiva, então* $f[f^{-1}[B]] = B$.

Exercício 15 *Considere um conjunto* A *e uma coleção de subconjuntos* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in M}$, *sendo* M *um conjunto de índices. Dada uma função* $f : A \to B$, *mostre que:*

(a) $f[\cup A_\lambda] = \cup f[A_\lambda]$;

(b) $f[\cap A_\lambda] \subset \cap f[A_\lambda]$*;*

(c) Obtenha um exemplo em que $f[\cap A_\lambda] \neq \cap f[A_\lambda]$*;*

Supondo $\{B_\mu\}_{\mu \in L}$ *uma coleção de subconjunto de* B*, para uma família de índices* L*. Mostre que:*

(d) $f^{-1}[\cup B_\mu] = \cup f[B_\mu]$*;*

(f) $f^{-1}[\cap B_\mu] = \cap f[B_\mu]$*;*