Análise I
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4

1 Corpos ordenados, supremo e ínfimo.

Exercício 1 *Seja E um subconjunto de um conjunto ordenado S. Suponha que $\alpha \in S$ é uma cota inferior de E e que $\beta \in S$ é uma cota superior de E. Mostre que $\alpha \leqslant \beta$.*

Exercício 2 *Considere $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente e defina*

$$-A \doteq \{-x;\ x \in A\}.$$

Prove que $\inf A = -\sup(-A)$.

Exercício 3 *Considere dois números complexos*

$$z = a + bi \quad e \quad w = c + di$$

e defina a relação

$$z < w \ \doteq \ \text{se} \ \ a < c, \quad \text{ou} \ \ a = c \ \text{e} \ \ b < d.$$

Verifique que $<$ define uma relação de ordem em $\mathbb{C}$. Esta relação de ordem é compatível com as operações de soma e produto usuaais de $\mathbb{C}$? (Dica: o complexo $z = i$ é um problema.)

Exercício 4 *Suponha que $\mathbb{K}$ seja um corpo e prove as seguintes afirmações.*

(a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$;

(b) $x + y = x \Rightarrow y = 0$;

(c) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$;

(d) $-(-x) = x$;

(e) $x \neq 0$ e $xy = xz \Rightarrow y = z$;

(f) $x \neq 0$ e $xy = x \Rightarrow y = 1$;

(g) $x \neq 0$ e $xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$;

(h) $x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$;

(i) $0x = 0$;

(j) $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$;

(k) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$;

(l) $(-x)(-y) = xy$;

Exercício 5 *Suponha que $\mathbb{K}$ seja um corpo ordenado e prove as seguintes afirmações.*

(a) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$, *e vice-versa;*

(b) $x > 0$ e $y < z \Rightarrow xy < xz$;

(c) $x < 0$ e $y < z \Rightarrow xy > xz$;

(d) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. *Em particular,* $1 > 0$;

(e) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$;

Exercício 6 *Resolva as sequintes equações (em $\mathbb{R}$) justificando cada operação que você utilizar*

(a) $2x + 5 = 8$;

(b) $x^2 - 1 = 3$;

(c) $x^2 = 2x$;

(d) $(x + 2)(x - 1) = 0$;

Exercício 7 *Se $a \in \mathbb{R}$ satisfaz $a^2 = a$, prove que $a = 1$ ou $a = 0$;*

Exercício 8 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$;*

Exercício 9 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$. Prove que $a^n < b^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$;*

Exercício 10 *Obtenha o ínfimo e o supremo, caso existam, de cada um dos conjuntos.*

(a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ 2x + 5 > 0\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ x + 2 \geqslant x^2\}$;

(c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ x < 1/x\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 2x - 5 < 0\}$;

Exercício 11 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ contém uma de suas cotas superiores, então esta cota superior é o supremo de A;*

Exercício 12 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio. Mostre que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma cota superior de A se, e somente se, as condições*

$$t \in \mathbb{R} \quad e \quad t > \beta$$

implicam em $t \notin A$;

Exercício 13 *Sejam A e B subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$.*

(a) *Mostre que $A \cup B$ é limitado;*

(b) *Mostre que* $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$;

Exercício 14 *Sejam A um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e $A_0 \subset A$, não vazio. Mostre que*

$$\inf(A) \leqslant \inf(A_0) \leqslant \sup(A_0) \leqslant \sup(A)$$

Exercício 15 *Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de $\mathbb{R}$ e defina*

$$A + B \doteq \{a + b,\ \forall a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

(a) *Mostre que* $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(b) *Mostre que* $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$;

Exercício 16 *Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de $\mathbb{R}$ e defina*

$$A \cdot B \doteq \{a \cdot b,\ \forall a \in A \quad e \quad b \in B\}$$

(a) *Se $A, B \subset \mathbb{R}^+$, mostre que* $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$;

(b) *Se $A, B \subset \mathbb{R}^-$, mostre que* $\sup(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$;

(c) *Se $A \subset \mathbb{R}^+$ e $B \subset \mathbb{R}^-$, mostre que* $\inf(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \inf(B)$;

Exercício 17 *Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $Im(f)$ um conjunto limitado. Dado $a \in \mathbb{R}$ mostre que*

$$\sup\{a + f(x);\ x \in X\} = a + \sup\{f(x);\ x \in X\}$$
$$\inf\{a + f(x);\ x \in X\} = a + \inf\{f(x);\ x \in X\}$$

Exercício 18 *Sejam X um conjunto não vazio e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções com $Im(f)$ e $Im(g)$ limitados. Mostre que*

$$\sup\{f(x) + g(x);\ x \in X\} \leqslant \sup\{f(x);\ x \in X\} + \sup\{g(x);\ x \in X\}$$
$$\inf\{f(x) + g(x);\ x \in X\} \geqslant \inf\{f(x);\ x \in X\} + \inf\{g(x);\ x \in X\}$$

Exercício 19 *Considere os conjuntos $X = Y = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$ e defina a função $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ por $h(x, y) = 2x + y$.*

(a) Fixado $x \in X$, obtenha os valores

$$f(x) \doteq \sup\{h(x, y);\ y \in Y\};$$

(b) Obtenha $\inf\{f(x);\ x \in X\}$;

(c) Fixado $y \in Y$, obtenha os valores

$$g(y) \doteq \inf\{h(x, y);\ x \in X\};$$

(d) Obtenha $\sup\{g(y);\ y \in Y\}$;

Exercício 20 *Repita o exercício anterior para a função $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x < y, \\ 1, & \text{se } \ x \geqslant y \end{cases}$$

Exercício 21 *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Defina as funções $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ por*

$$f(x) \doteq \sup\{h(x, y);\ y \in Y\} \quad e \quad g(y) \doteq \inf\{h(x, y);\ x \in X\}$$

Prove que

$$\sup\{g(y);\ y \in Y\} \leqslant \inf\{f(x);\ x \in X\}$$