Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 5 - Sequências

Exercício 1 *Dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, mostre que* $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *e* $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$*;*

Exercício 2 *Sejam um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$. Dizemos que p é um ponto de fronteira de A se toda bola aberta centrada em p contém pontos de A e de A^c. O conjunto de todos estes os chamado de fronteira de A e denotado por ∂A.*

(a) *Determine $\partial \mathbb{Q}$;*

(b) *Mostre que $A = \overline{A}$ se, e somente se, $\partial A \subset A$;*

Exercício 3 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é não enumerável, então A' também é não enumerável;*

Exercício 4 *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ então $\overline{A} \setminus A'$ é enumerável (pode também ser finito);*

Exercício 5 *Prove as seguintes igualdades (não precisa ser utilizando a definição de limite):*

(a) $\lim \dfrac{2n+1}{n} = 2$; (b) $\lim \dfrac{2n+1}{n+5} = 2$; (c) $\lim \dfrac{2n+1}{n^2+1} = 0$;

Exercício 6 *Calcule* $\lim(x_n)$, *sendo* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida sa seguinte forma:*

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{1+1},\quad x_3 = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}},\ \ldots,\ x_n = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\cdots+\dfrac{1}{1+1}}}$$

Exercício 7 *Considere a sequência (de Fibonacci) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definda sa seguinte forma: $f_1 = 1,\ f_2 = 2$ e $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$, se $n \geqslant 2$. Calcule* $\lim(f_{n+1}/f_n)$*;*

Exercício 8 *Suponha que $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. Prove que se x é convergente, então a sequência $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ também o é. O contrário é verdadeiro?*

Exercício 9 *Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais. Mostre que:*

(a) *se $x_n \to a$ e $x_n \geqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a \geqslant 0$;*

(b) *se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, com $x_n \leqslant y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\lim(x_n) \leqslant \lim(y_n);$$

(c) *se existe outra sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo*

$$\lim(x_n) = \lim(z_n) = a \quad \text{e} \quad x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

então $\lim(y_n) = a$*;*

(d) $\lim \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$;

Exercício 10 *Mostre que para cada $a \in \mathbb{R}$ existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de termos racionais convergindo para a;*

Exercício 11 *Sejam $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências de Cauchy de números reais. Defina a seguinte relação:*

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}(|x_n - y_n|) = 0.$$

Mostre que:

(a) $x \sim x$, *(b)* $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, *(c)* $x \sim y$ *e* $y \sim z \Rightarrow x \sim z$,

sendo $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy;

Exercício 12 *Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequências (limitadas) de números reais, com*

$$\limsup(x_n) = A,\ \liminf(x_n) = a,\ \limsup(y_n) = B, \quad e \quad \liminf(y_n) = b$$

Mostre que:

(a) $\limsup(x_n + y_n) \leqslant A + B \quad e \quad \liminf(x_n + y_n) \geqslant a + b$;

(b) $\limsup(-x_n) = -a \quad e \quad \liminf(-y_n) = -A$;

(c) $\limsup(x_n \cdot y_n) \leqslant A \cdot B \quad e \quad \liminf(x_n \cdot y_n) \geqslant a \cdot b$;

1 Desafios: Espaços Métricos

Definição 1 *Um espaço métrico $M = (M, d)$ é um conjunto munido de uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que satisfiaz as seguintes propriedades:*

(a) $d(x, y) \geq 0$, *para todo* $x, y \in M$;

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *para todo* $x, y, z \in M$;

Uma função com tal propriedade é dita uma métrica em M.

1. Qual deveria ser a definição de sequência convergente num espaço métricos?
2. Qual deveria ser a definição de sequência de Caucy num espaço métricos?
3. Ser convergente e ser de Cauchy são conceitos equivalentes?
4. Um espaço métrico no qual vale tal equivalência é dito espaço métrico completo.

Exercício 13 *Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexo s com sua estrutura natural de soma e produto.*

(a) Mostre que $d(w, z) \doteq |w - z|$ define uma métrica em $\mathbb{C}$. Aqui, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, em que $z = a + ib$.

(b) *Dada uma squência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *podemos escrever*

$$x_n = a_n + ib_n, \;\; n \in \mathbb{N},$$

com $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$. *Mostre que* $x_n \to p = a + ib$ *se, e somente se*

$$a_n \to a \quad e \quad b_n \to p;$$

(c) *O espaço métrico* $\mathbb{C}$ *é completo?*

Exercício 14 *Considere em* $\mathbb{C}$ *a métrica usual* $d(z, w) = |z - w|$.

Exercício 15 *Seja* M *um conjunto não vazio. Dados* $p, q \in M$ *defina*

$$d(p, q) \doteq \{ \; 1, \quad se \quad p \neq q, 0, \quad se \quad p = q.$$

Mostre que $d(p, q)$ *define uma métrica;*

Exercício 16 *Considere o espaço* $\mathbb{R}^k$ *com a métrica*

$$d(x, y) = ||x - y|| = \left(\sum_{j=1}^{k} (x^j - y^j)^2 \right)^{1/2},$$

sendo $x = (x^1, \ldots, x^k)$ *e* $y = (y^1, \ldots, y^k)$. *Os termos de uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}^k$ *podem ser denotados da seguinte forma:*

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k.$$

Mostre que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $p = (p^1, \ldots, p^k)$ *se, e somente se, a sequência* $\{x_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* p^j, *para cada* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$;