

LISTA 7 - Topologia

1 Topologia em \mathbb{R}

Exercício 1 Dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, mostre que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$;

Exercício 2 Mostre que se $X \subset F$ e F é fechado, então $\overline{X} \subset F$;

Exercício 3 Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos abertos. Mostre que $A + B$ e $A \cdot B$ são conjuntos abertos;

Exercício 4 Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, prove que:

- (a) se A é compacto e B fechado, então $A + B$ é fechado;
- (b) se A e B são compactos, então $A + B$ e $A \cdot B$ são compactos;
- (c) se A é fechado e B é compacto, então $A \cdot B$ pode não ser compacto;

Exercício 5 Mostre que \mathbb{Z} é um conjunto fechado de \mathbb{R} ;

Exercício 6 Mostre que \mathbb{Q} não é um conjunto aberto e nem um conjunto fechado de \mathbb{R} ;

Exercício 7 Sejam um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}$. Dizemos que p é um ponto de fronteira de A se toda bola aberta centrada em p contém pontos de A e de A^c . O conjunto de todos estes pontos é chamado de fronteira de A e denotado por ∂A .

- (a) Determine $\partial \mathbb{Q}$;
- (b) Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Q}, \text{ e } x, y \in [0, 1]\}$. Determine ∂A ;
- (c) Mostre que A é aberto se, e somente se, não possui nenhum dos seus pontos de fronteira;
- (d) Mostre que A é fechado se, e somente se, $\partial A \subset A$;

Exercício 8 Sejam um $A \subset \mathbb{R}$ e A° o conjunto de todos os pontos interiores de A , o qual é chamado de interior de A

- (a) Mostre que A é um conjunto aberto se, e somente se, $A^\circ = A$;
- (b) Mostre que: $A^\circ \subset A$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ e $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
- (c) Mostre que $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ \cup B^\circ$;
- (d) Obtenha um A tal que $A^\circ = \emptyset$;

Exercício 9 Dado $A \subset \mathbb{R}$ defina por A^- a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A .

- (a) Mostre que A^- é um conjunto fechado;

(b) Mostre que $x \in A^-$ se, e somente se, $x \in A^\circ$ ou $x \in \partial A$;

Exercício 10 Considere as funções reais $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$f(x) = ax + b \ (a \neq 0), \ g(x) = x^2 \ \text{e} \ h(x) = x^3.$$

(a) Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto, então $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$ são abertos.

(b) O item anterior vale para A fechado?

(c) Se A é aberto, então $f(A)$ e $h(A)$ são abertos.

(d) Se K é compacto, então são compactos: $f(K)$, $g(K)$, $h(K)$, $f^{-1}(K)$, $g^{-1}(K)$ e $h^{-1}(K)$.

Exercício 11 Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é não enumerável, então A' também é não enumerável;

Exercício 12 Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ então $\overline{A} \setminus A'$ é enumerável (pode também ser finito);

Exercício 13 Obtenha uma coleção $\{K_n; n \in \mathbb{N}\}$ de compactos de \mathbb{R} tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ não é compacto;

Exercício 14 Seja $\{K_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma coleção de compactos de \mathbb{R} tal que $K_{n+1} \subset K_n$. Prove que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$;

Exercício 15 Seja $K \neq \emptyset$ um subconjunto compacto de \mathbb{R} . Prove que $\inf(K), \sup(K) \in K$;

Exercício 16 Obtenha dois conjuntos fechados $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}$ tais que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ e

$$\inf\{|x_1 - x_2|, x_1 \in F_1 \ \text{e} \ x_2 \in F_2\} = 0;$$

2 Desafios

Exercício 17 Seja M um conjunto infinito. Dados $p, q \in M$ defina

$$d(p, q) \doteq \begin{cases} 1, & \text{se } p \neq q, \\ 0, & \text{se } p = q. \end{cases}$$

(a) Mostre que $d(p, q)$ define uma métrica;

(b) Quais são os conjuntos abertos de M ? Quais são os fechados?

Exercício 18 Seja X um conjunto não vazio e \mathcal{T} uma coleção de subconjuntos de X . Dizemos que \mathcal{T} é uma topologia em X se as seguintes propriedades são satisfeitas:

(I) X e \emptyset são elementos de \mathcal{T} ;

(II) Dados $A, B \in \mathcal{T}$ tem-se que $A \cap B \in \mathcal{T}$;

(III) Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma coleção de elementos de \mathcal{T} , então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

O par (X, \mathcal{T}) é dito um espaço topológico e cada elemento da topologia \mathcal{T} é dito um aberto.

(a) Verifique que o conjunto de todos os abertos de \mathbb{R} define uma topologia em \mathbb{R} .

(b) O que deveria ser um conjunto fechado numa topologia?

(c) Qual é a topologia de um espaço métrico?

(d) Qual deveria ser a noção de convergência de seqüências convergentes num espaço topológico?