CM 095 - Análise I
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 8 - Continuidade

1 Limites

Exercício 1 *Suponha* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to c} |f(x)-L| = 0$;

Exercício 2 *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{x\to 0} f(x+c) = L$;

Exercício 3 *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *tais que* $\lim_{x\to c}(f(x))^2 = L$.

(a) *Mostre que se* $L = 0$, *então* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$;

(c) *Obtenha um exemplo em que* $L \neq 0$ *e não exista* $\lim_{x\to c} f(x)$;

Exercício 4 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$. *Suponha que* f *seja limitada numa vizinhança de* c *e que* $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. *Mostre que* $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$;

Exercício 5 *Sejam* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \overline{A}$.

(a) *Mostre que se existem os limites* $\lim_{x\to c} f(x)$ *e* $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))$, *então existe* $\lim_{x\to c} g(x)$;

(c) *O mesmo vale para o produto?*

Exercício 6 *Considere as funções reais*

$$f(x) = x + 1 \quad e \quad g(x) = \begin{cases} 2, & se \quad x \neq 1, \\ 0, & se \quad x = 1 \end{cases}$$

(a) *Calcule* $\lim_{x\to 1} g(f(x))$ *e compare com* $g(\lim_{x\to 1} f(x))$;

(c) *Calcule* $\lim_{x\to 1} f(g(x))$ *e compare com* $f(\lim_{x\to 1} g(x))$;

2 Funções Contínuas

Exercício 7 *Suponha que uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaça a seguinte propriedade: Existe um* $M > 0$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f *é contínua em* $\mathbb{R}$;

Exercício 8 *Suponha* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua.*

(a) *Mostre que* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, *para qualquer conjunto* $A \subset \mathbb{R}$;

(b) *Se* $Z(f)$ *denota o conjunto de zeros de* f, *então* $Z(f)$ *é fechado;*

(c) *Suponha f sobrejetiva e e A é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$, mostre então $f(A)$ é um subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é outra função contínua e sobrejetiva. Mostre que se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, então $f = g$;*

(d) *Suponha que $f(r) = 0$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Mostre que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$;*

Exercício 9 *Considere o intervalo $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e uma função contínua $f : I \to I$. Mostre que existe $c \in I$ tal que $f(c) = c$;*

Exercício 10 *Sejam $a < b < c$ e duas funçõe contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [b,c] \to \mathbb{R}$, tais que $f(b) = g(b)$. Mostre que a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in [a,b], \\ g(x), & se \quad x \in [b,c] \end{cases}$$

é contínua em $[a,b]$;

Exercício 11 *Estude os pontos de continuidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exercício 12 *Estude os pontos de continuidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exercício 13 *Seja $E \subset \mathbb{R}$. Defina a distância entre $x \in \mathbb{R}$ e E pondo*

$$\rho_E(x) = \inf_{y \in X} |x - y|$$

(a) *Mostre que $\rho_E(x) = 0$ se, e somente se, $x \in \overline{E}$.*

(b) *Mostre que ρ_E é uma função uniformemente contínua.*

Exercício 14 *Sejam A e B dois conjuntos fechados e disjuntos em $\mathbb{R}$. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo*

$$f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)}.$$

(a) *Mostre que f é contínua.*

(b) *Mostre que $f(\mathbb{R}) = [0,1]$.*

(c) *Quando $f(x) = 0$ e quando $f(x) = 1$?*

Exercício 15 *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $Z(f) = \{p \in \mathbb{R};\ f(p) = 0\}$. Mosre que $Z(f)$ é fechado.*

Exercício 16 *Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}.$$

É possível definir f em $x = 2$ de modo que f seja contínua?

Exercício 17 *Mostre que a função* $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ *é contínua;*

Exercício 18 *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita aditiva se* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$. *Mostre que se* f *é contínua num ponto* $a \in \mathbb{R}$, *então ela é contínua em todo* $\mathbb{R}$;

Exercício 19 *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisfaz a seguinte propriedade*

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) *Mostre que se* f *é contínua em* $x = 0$, *então é contínua em* $\mathbb{R}$;

(b) *Em particular, se* $f(a) = 0$, *para algum* $a \in \mathbb{R}$, *então* $f(x) = 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

Exercício 20 *Mostre que se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua, então o conjunto* $\{x \in \mathbb{R}; \ f(x) \leqslant \alpha\}$ *é fechado, seja qual for o número* $\alpha \in \mathbb{R}$;

Exercício 21 *Suponha que uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaça a seguinte propriedade: Existe um* $M > 0$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) *Mosre que* f *é contínua;*

(b) *Mostre que se* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Caucly, então* $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy;*

Exercício 22 *Mostre que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua se, e somente se,* $f^{-1}(C)$ *é fechado para qualquer fechado* $C \subset \mathbb{R}$.

3 Desafios

Exercício 23 *Sejam* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *uma função e* $p \in \mathbb{R}$.

(a) *Obtenha uma definição para " F é contínua no ponto p";*

(b) *Escrevendo* $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, *sendo* $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *mostre que* F *é contínua em* p *se, e somente se, cada uma das* f_j *é contínua em* p;

(c) *Mostre que uma função linear* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é contínua em* $\mathbb{R}^n$;

Exercício 24 *Seja* $E \subset \mathbb{R}$ *um conjunto não compacto.*

(a) *Mostre que existe uma função contínua definida em* E *que não é limitada.*

(b) *Existe uma função contínua e limitada definida em* E *que não possui máximo.*

Exercício 25 *Dado* $x \in \mathbb{Q}$ *podemos escrever* $x = \frac{m}{n}$, *com* m, n *inteiros e primos entre si. Se* $x = 0$, *então escolhemos* $n = 1$. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \notin \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{se } \ x \in \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Mostre que f *é contínua em cada ponto irracional e descontínua em todo ponto racional.*