

LISTA 7 - Diferenciabilidade

1 Funções diferenciáveis em \mathbb{R}

Exercício 1 Considere f_1, f_2, \dots, f_n funções diferenciáveis num ponto x_0 . Obtenha as seguintes derivadas:

$$(a) (f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0); \quad (b) (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)'(x_0); \quad (c) (f_1 \cdot f_2 \dots f_n)'(x_0);$$

Supondo $f_1 = f_2 = \dots = f_n$ obtenha $(f^n)'(x_0)$. Aplique este resultado para obter a derivada de $g(x) = x^n$.

Exercício 2 Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0)x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De

Exercício 3 Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ k vezes derivável, tal que $f(tx) = t^k f(x)$, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!]x^k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De

Exercício 4 Suponha f e g duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) . Mostre $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x)$$

Exercício 5 Suponha f e g duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) . Mostre que se $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, então existe uma constante C tal que $f(x) = g(x) + C$.

Exercício 6 Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par e derivável em \mathbb{R} . Mostre que f' é uma função ímpar;

Exercício 7 Mostre que a função $f(x) = x^{1/3}$ não é diferenciável em 0;

Exercício 8 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c, \\ ax + b, & x > c. \end{cases} \quad (a, b, e c \text{ constantes})$$

Obtenha os valores de a e b (em termos de c) tais que exista $f'(c)$.

Exercício 9 Verifique em quais pontos as seguintes funções são diferenciáveis.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Exercício 10 Considere a e c números reais, com $c > 0$, e $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{|x|^c}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Prove as seguintes afirmações

- (a) f é contínua se, e somente se, $a > 0$; (b) $f'(0)$ existe, e somente se, $a > 1$;

Exercício 11 Suponha f uma função definida em \mathbb{R} que satisfaz a desigualdade

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é constante.

Exercício 12 Suponha f e g funções reais tais que existem $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$, com $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Exercício 13 As funções abaixo estão definidas em \mathbb{R} . Para cada uma, obtenha os pontos extremantes (derivada igual a zero) e os intervalos onde elas são crescentes e aqueles onde são decrescentes.

- (a) $f_1(x) = x^2 - 3x + 5$; (c) $f_3(x) = \cos(x)$;
(b) $f_2(x) = 3x - 4x^2$; (d) $f_4(x) = \sin(x)$;

Exercício 14 Considere um número positivo P . Prove que dentre todos os números positivos x, y tais que $xy = P$, a soma $x + y$ é a menor possível quando $x = y = \sqrt{P}$.

Exercício 15 Considere a_1, a_2, \dots, a_n números reais e a função f definida em \mathbb{R} por

$$f(x) = \sum_{j=1}^n (a_j - x)^2.$$

Existe máximo? Existe mínimo?

Exercício 16 Esboce o gráfico da função $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.

Exercício 17 Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau n . Prove que para todo $a, x \in \mathbb{R}$ vale

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Exercício 18 Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se contração quando existe uma constante $k \in [0, 1)$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$, para todo $x, y \in X$.

- (a) Mostre que se f é derivável no intervalo I e $|f'(x)| \leq k < 1$ então f é uma contração.
(b) Suponha que $X \subset \mathbb{R}$ é fechado e $f : X \rightarrow X$ é uma contração. Mostre que, fixado $x_0 \in X$, a sequência

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n)$$

converge para um ponto $a \in X$ tal que $f(a) = a$;

- (c) Prove que toda contração $f : X \rightarrow X$, $X \subset \mathbb{R}$ fechado, possui único ponto fixo, isto é, existe único $a \in X$ tal que $f(a) = a$;

2 Desafios

Exercício 19 Denote por $Df(c)$ a derivada da função f no ponto c . Considere uma nova definição de derivada D^*f dada por

$$D^*f(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(c+h) - f^2(c)}{h},$$

onde $f^2(x)$ denota $(f(x))^2$.

- (a) Mostre que se existem $D^*f(c)$ e $D^*g(c)$, então existem $D^*(f+g)(c)$ e $D^*(f \cdot g)(c)$;
- (b) Qual a relação entre $Df(c)$ e $D^*f(c)$, supondo que ambos existem;
- (c) Quais funções satisfazem a igualdade $D^*f(c) = Df(c)$?

Exercício 20 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ no intervalo I . Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x, x_0 \in I$ vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$