CM095/CMM202 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

PRIMEIRA PROVA - 16/09/19

- Não serão aceitas respostas sem justificativas;
- Resultados provados em sala podem ser utilizados, a menos que a questão seja o tal resultado.
- Você deve deixar claro onde está utilizando os resultados vistos em sala.
- Não é preciso escrever com caneta.
- A maior nota possível é 100 pontos.

Exercício 1 *(20 pontos) Demonstre os seguintes fatos:*

(a) $n! > 2^n$, *para todo natural* $n \geqslant 4$.

(b) Dados dois números naturais a, b, *prove que existe um número natural* m *tal que* $ma > b$.

Exercício 2 *(20 pontos) Seja* $f : X \to Y$ *uma função sobrejetiva. Supondo* X *enumerável, prove que* Y *é enumerável.*

Exercício 3 *(20 pontos) Sejam* A *e* B *dois conjuntos enumeráveis.*

(a) Mostre que $A \cup B$ *é enumerável.*

(b) Use o item (a) para mostrar que o conjunto do irracionais não é enumerável.

Exercício 4 *(20 pontos) Sejam* A *um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}$ *e* $A_0 \subset A$, *não vazio.*

(a) Justifique a existência dos números reais $\inf(A), \inf(A_0), \sup(A_0)$ *e* $\sup(A)$.

(b) Mostre que

$$\inf(A) \leqslant \inf(A_0) \leqslant \sup(A_0) \leqslant \sup(A)$$

Exercício 5 *(20 pontos) Fixado um número irracional* $\alpha > 0$, *defina o conjunto*

$$\alpha \cdot \mathbb{Q} \doteq \{\alpha r;\ r \in \mathbb{Q}\}.$$

Prove que $\alpha \cdot \mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$.

Exercício 6 *(60 pontos) Um número real* x *é dito algébrico se existem inteiros* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *não todos nulos, tais que*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

BOA PROVA!