# CM095/CMM202 Análise I

Professor:

**Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

---

## SEGUNDA PROVA - 30/10/19

- Não serão aceitas respostas sem justificativas;
- Resultados provados em sala podem ser utilizados, a menos que a questão seja o tal resultado.
- Você deve deixar claro onde está utilizando os resultados vistos em sala.
- Não é preciso escrever com caneta.
- A maior nota possível é 100 pontos.
- Resultados de álgebra linear não precisam ser demonstrados. :)

---

**Exercício 1** *(50 pontos) Determine quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.*

(a) *Se* $\{F_\lambda\}_{\lambda\in}$ *é uma família de conjuntos fechados, então* $F = \bigcap_{\lambda\in F} F_\lambda$ *é um conjunto fechado.*

(b) *Toda sequência convergente* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *é uma sequência de Cauchy.*

(c) *O conjunto* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto fechado.*

(d) *Dado qualquer conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *temos que* $int(A) \cap A \neq \emptyset$.

(e) *Se* $K \subset \mathbb{R}$ *é compacto e* $F \subset \mathbb{R}$ *é fechado, então* $K \cap F$ *é compacto.*

**Exercício 2** *(20 pontos) Suponha que* $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty}(y_n)^2$ *sejam convergentes. Mostre que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *é convergente;*

**Exercício 3** *(30 pontos) Dado* $A \subset \mathbb{R}$ *defina por* $A^-$ *a interseção de todos os conjuntos fechados que contém* $A$.

(a) *Mostre que* $A^-$ *é um conjunto fechado;*

(b) *Mostre que se* $S$ *é um conjunto fechado tal que* $A \subset S$, *então* $A^- \subset S$.

**Exercício 4** *(20 pontos) Sejam* $K \subset \mathbb{R}$ *um conjunto compacto e a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) = ax + b \quad \text{sendo } a \neq 0.$$

*Mostre que* $f(K)$ *é um conjunto compacto, sem utilizar argumentos sobre funções contínuas.*

BOA PROVA!