CM095/CMM202 Análise I

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

SEGUNDA PROVA - 27/11/19

- Não serão aceitas respostas sem justificativas;
- Resultados provados em sala podem ser utilizados, a menos que a questão seja o tal resultado.
- Você deve deixar claro onde está utilizando os resultados vistos em sala.
- Não é preciso escrever com caneta.
- A maior nota possível é 100 pontos.

Exercício 1 *(30 pontos) Suponha* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua.*

(a) *Se* $Z(f)$ *denota o conjunto de zeros de* f*, então* $Z(f)$ *é fechado;*

(b) *Suponha* f *sobrejetiva e* A *é um subconjunto denso de* $\mathbb{R}$*, mostre então* $f(A)$ *é um subconjunto denso de* $\mathbb{R}$*.*

(c) *Suponha que* $f(r) = 0$*, para todo* $r \in \mathbb{Q}$*. Mostre que* $f(x) = 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

Exercício 2 *(20 pontos) Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita aditiva se* $f(x + y) = f(x) + f(y)$*, para todo* $x, y \in \mathbb{R}$*. Mostre que se* f *é contínua num ponto* $a \in \mathbb{R}$*, então ela é contínua em todo* $\mathbb{R}$*;*

Exercício 3 *(20 pontos) Estude os pontos de continuidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Exercício 4 *(20 pontos) Suponha* f *e* g *duas funções contínuas no intervalo* $[a, b]$ *e diferenciáveis em* (a, b)*. Mostre que se* $f'(x) = g'(x)$*, para todo* $x \in (a, b)$*, então existe uma constante* C *tal que* $f(x) = g(x) + C$*.*

Exercício 5 *(20 pontos) Utilizando o teorema da função inversa, mostre que a função* $f(x) = x^{1/3}$ *não é diferenciável em* 0*;*

BOA PROVA!