CE065 - ELEMENTOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA
2ª. PARTE

1. FUNÇÕES

1.1- Sistema de Coordenadas Cartesianas ou Plano Cartesiano

A localização de pontos num plano é bastante antiga na Matemática e data aproximadamente do século III a.C. Porém, atualmente, usa-se o Sistema de Coordenadas Cartesianas que teve origem com os trabalhos do matemático René Descartes (século XVIII).

Esse sistema é formado por dois eixos perpendiculares que se cruzam em um ponto chamado **origem**. Esses dois eixos chamam-se: **eixo das abscissas** (horizontal X) e **eixo das ordenadas** (vertical Y).

Exercícios 1

1) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos** e indique: o eixo das **abscissas**, o eixo das **ordenadas**, a **origem** e os **quatro quadrantes.**

2) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos** e marque no plano os pontos cujas **coordenadas** são:

a) $P_1(2, -1)$	b) A(0, 2)	c) B(0, 3)	d) M(0, -2)	e) N(2, 2)
f) V(-2, 3)	g) $P_2(-1, 0)$	h) $P_3(-2, -1)$	i) $P_4(2, 1)$	j) $P_5(0, -4)$

3) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos**, marque nele os pontos P_1, P_2 e P_3. Trace os **segmentos de reta** $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ e $\overline{P_2P_3}$ que definem o triângulo $\Delta P_1P_2P_3$.

4) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos**, marque nele os pontos P_4 e P_5. Trace a reta definida por esses dois pontos.

1.2- Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se **produto cartesiano** de A por B ao conjunto formado por todos os pares ordenados (x; y) com $x \in A$ e $y \in B$. A notação do produto cartesiano de A por B é AxB, onde se lê "A cartesiano B".

Exercícios 2

1) Escreva em linguagem simbólica o produto cartesiano AxB.

2) Dados os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {5; 6}, pede-se os produtos cartesianos:

a) AxB
b) BxA

3) Olhando os resultados dos produtos cartesianos AxB e BxA você conclui que se A é diferente de B, ou seja, $A \neq B$, então AxB é .... de BxA.

4) Faça a **Representação Gráfica** dos dois produtos cartesianos do exercício 2 em um plano cartesiano.

5) Calcule o número de elementos dos produtos cartesianos do exercício 2, ou seja, qual o valor de n(AxB) conhecendo-se os valores de n(A) e n(B)?

6) Faça a **Representação Gráfica** do produto cartesiano dos intervalos fechados B = [3; 5] e C = [3; 7] em um plano cartesiano. Veja que o resultado é um **retângulo**.

7) Faça a **representação gráfica** do produto cartesiano dos intervalos B =]3; 5], aberto à esquerda e C = [3; 7[, aberto à direita, em um plano cartesiano. Veja que o resultado é um **retângulo com o lado vertical esquerdo e o lado superior tracejados.**

8) O número de elementos de um conjunto B é n(B) = 3m e o de um conjunto D é n(D) = 3p. Qual o número de elementos de BxD, ou seja, n(BxD), sabendo que p – m = 1 e m + 2p = 8?

9) Faça a **representação gráfica** do produto cartesiano entre o intervalo A = [-3; ∞[e o intervalo E =]2; 5].

10) O eixo das abscissas Ox representa o conjunto dos números reais, R, e da mesma forma o eixo das ordenadas Oy, também, representa o conjunto dos reais, R. Então, o produto cartesiano RxR pode ser escrito como R^2. Faça a representação gráfica desse produto cartesiano.

1.3- Relação

Dados dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se **relação R de A em B** a qualquer subconjunto do produto cartesiano de A por B, AxB. A relação R de A em B é denotada por **A→B**.

Exercícios 3

1) Dados os conjuntos A = {2; 7; 9} e B = {7; 9; 10}, mostre que R_1 = {(2; 9), (2; 10); (7; 9)} é uma relação de A em B.

2) Verifique se R_2 = {(2; 9), (2; 10), (7; 5)} é uma relação de A em B.

3) Considere os conjuntos do exercício 1. Faça a representação da relação R_1: A→B por meio de diagrama de flechas.

4) Considere os conjuntos A e B do exercício 1. Escreva, por enumeração, a relação $R_4 = \{(x; y) \in AxB \mid x = y\}$.

5) Considere os conjuntos A e B do exercício 1. Escreva, por enumeração, a relação $R_5 = \{(x; y) \in AxB \mid x < y\}$.

Domínio e Conjunto Imagem

Dado o par ordenado (x; y) pertencente à relação R de A em B, tem-se que a relação R associa x a y, e então, y é a imagem de x em R. Dessa forma, o conjunto domínio de R, D(R) é formado por todos os elementos de A que estão associados a pelo menos um elemento de B e o conjunto imagem de R, Im(R) é formado por todos os elementos de B que são imagens de pelo menos um elemento de A.

Exercícios 4

1) Seja A = {2; 5; 10} e C = {-4; 4; 3}.

a) Represente por diagrama em flechas a relação $R_1 = \{(x; y) \in AxC \mid x + y \leq 7\}$.
b) Represente por extensão a relação $R_1 = \{(x; y) \in AxC \mid x + y \leq 7\}$.
c) Represente por extensão o domínio e o conjunto imagem de R_1.
d) Represente por diagrama em flechas a relação $R_2 = \{(x; y) \in AxC \mid x^2 = y\}$.
e) Represente por extensão o domínio e o conjunto imagem de R_2.

2) Faça a **representação gráfica** (no plano cartesiano) das relações R_1 e R_2 citadas anteriormente.

3) Dados os intervalos A = [-3; 3] e B = [-9, 9], faça a representação gráfica (no plano cartesiano) das relações:

a) $R_1 = \{(x; y) \in AxB \mid y = x^2\}$
b) $R_2 = \{(x; y) \in AxB \mid y = 3x\}$
c) Represente por extensão $D(R_1)$ e $Im(R_1)$.
d) Represente por extensão $D(R_2)$ e $Im(R_2)$.

1.4- Função

Dados dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se **função a toda relação de A em B** na qual, para todo elemento de A, está associado um único elemento de B. Desta forma, todos os elementos de A estão associados a um elemento de B e nenhum elemento de A pode estar associado a dois ou mais elementos de B.

Uma função do conjunto A em B denotada por **f: A → B** pode ser representada por uma lei do tipo **y = f(x)** que determina a forma como são obtidos os pares (x; y) do produto cartesiano, ou seja, $(x; y) \in AxB$. Se uma relação R é uma função de A em B, dizemos que:

- A é o domínio da função;
- B é o contradomínio;

- os elementos do contradomínio B que estão associados aos do domínio A formam o conjunto imagem da função.

Exercícios 5

1) Identifique nas figuras que o professor fará no quadro negro, o que é função e o que não é, explicando por quê.

2) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, pede-se:

a) O produto cartesiano AxB.

b) Os pares (pontos) correspondentes à função, $y = f(x): A \rightarrow B$, $y = f(x) = 2x + 1$.

c) Represente os pares ordenados obtidos no item (b) em um plano cartesiano.

3) Dado o conjunto dos reais, R, e o conjunto dos reais não negativos, R_+, pede-se:

a) A representação no plano cartesiano da função $y = f(x): R \rightarrow R_+$, $y = f(x) = 3x^2 + 2$.

b) A representação no plano cartesiano da função $y = f(x): R \rightarrow R_+$, $y = f(x) = x^2$.

4) Seja a relação de A = [0; 5] em B = {1/5} cuja expressão é $f(x) = y = \frac{1}{5}$.

a) f(x) é uma função, explique por quê.

b) Qual o conjunto domínio de f(x)?

c) Qual o conjunto contradomínio de f(x)?

d) Faça a representação no plano cartesiano da função f(x).

5) Seja a expressão $f(x) = y = \frac{1}{b - a}$, tal que $x \in [a; b] \subset R$, com $b > a$.

a) f(x) é uma função, explique por quê.

b) Qual o conjunto domínio de f(x)?

c) Qual o conjunto contradomínio de f(x)?

d) Faça a representação no plano cartesiano da função f(x), assumindo um valor genérico para b.

6) As funções dos itens 4 e do item 5, têm um nome especial. Qual é este nome?

FUNÇÃO CONSTANTE

Chama-se **função constante** a toda função na qual todos os elementos do domínio possuem a mesma imagem.

Exercícios 6

1) Uma variável aleatória X tem como função densidade de probabilidade a função $f(x) = 1$, com $x \in [0; 1] \subset R$.
   a) Qual o domínio de f?
   b) Qual o contradomínio de f?
   c) Faça a representação gráfica da função no plano cartesiano.

2) Uma variável aleatória Y tem como função densidade de probabilidade a função $f(y) = 1/5$, com $y \in [5; 10] \subset R$.
   a) Qual o domínio de f?
   b) Qual o contradomínio de f?
   c) Faça a representação gráfica da função no plano cartesiano.

FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

Uma função f(y), definida no intervalo [a; b], é chamada de crescente se para $y_2 > y_1$ tem-se $f(y_2) > f(y_1)$ e da mesma forma g(y), definida no intervalo [a; b], é chamada de decrescente se para $y_2 > y_1$ ocorrer $g(y_2) < g(y_1)$.

Exercícios 7

1) A função $g(x) = 3x$ definida em R é crescente ou decrescente? Por quê?

2) A função $f(x) = 2^x$ com $x \in R_+$ é crescente ou decrescente? Por quê?

3) A função $f(x) = \text{sen}(x)$ com $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ é crescente ou decrescente? Por quê?

4) A função $h(x) = \text{tg}(x)$ com $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ é crescente ou decrescente? Por quê?

5) A função $f(x) = 3^{-x}$ com $x \in R_+$ é crescente ou decrescente? Por quê?

FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES ÍMPARES

Função Par

Uma função é chamada de **função par** quando para qualquer valor **x** do seu domínio ocorrer $\mathbf{f(x) = f(-x)}$. Assim, em uma função par valores simétricos (em relação à origem) do domínio têm sempre a mesma imagem no contradomínio.

Função Impar

Uma função é chamada de **função impar** quando para qualquer valor x do seu domínio ocorrer $\mathbf{f(x) = -f(-x)}$. Assim, em uma função impar valores simétricos (em relação à origem) do domínio têm imagens simétricas no contradomínio.

Função Sem Paridade
Uma função que **não é par** e **não é impar** é chamada de **sem paridade** ou se diz que **não tem paridade**.

Exercícios 8

1) Classifique as funções abaixo em **função par,** em **função impar** ou em **função sem paridade** e justifique por quê.

a) $f(x) = x^2$ com $x \in R$ (   )

b) $f(x) = 3x^2$ com $x \in R$ (   )

c) $f(x) = x^3$ com $x \in R$ (   )

d) $f(x) = 3x^4$ com $x \in R$ (   )

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2\sigma}(x-\mu)^2}$ com $x \in R$, $\mu \in R$ e $\sigma \in R_+$ (   )

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2\sigma}(x-\mu)}$ com $x \in R$, $\mu \in R$ e $\sigma \in R_+$ (   )

g) $f(x) = 3x$ com $x \in R$ (   )

h) $y = x^2 + 3$ com $x \in R$ (   )

i) $h(x) = -\dfrac{x^3}{2}$ com $x \in R$ (   )

j) $u(x) = x^3 - 1$ com $x \in R$ (   )

k) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z)^2}$ com $z \in R$ (   )

2) Classifique as funções que o professor desenhará no quadro negro em **função par,** em **função impar** ou em **função sem paridade** e justifique por quê.

Função Sobrejetora
Uma função f: $A \rightarrow B$ é chamada de **função sobrejetora** quando todo elemento do **contradomínio B** for imagem de pelo menos um elemento do **domínio A** da função. Desta forma o **conjunto imagem** de **f é igual ao seu contradomínio**.

Função Injetora
Uma função f: $A \rightarrow B$ é chamada de **função injetora** quando para **dois elementos distintos quaisquer** do domínio, corresponderem **duas imagens distintas** no contradomínio.

Função Bijetora
Uma função f: $A \rightarrow B$ é chamada de **função bijetora** quando for **injetora e sobrejetora** simultaneamente.

Exercícios 9

1) A função $f(x) = x^3$, com $x \in R$, é sobrejetora? Por quê?

2) A função $g(x) = x$, com $x \in R$, é injetora? Por quê?

3) A função $f(x) = x^3$, com $x \in R$, é bijetora? Por quê?

4) A função y = sen(x), com $x \in R$ é injetora?

5) Complete o texto de forma a torná-lo verdadeiro: "toda reta paralela ao eixo das abscissas, Ox, corta uma função injetora em no máximo um ....". Então, a função y = f(x) = sen(x) não é injetora porque existem retas paralelas ao eixo Ox cortando o gráfico em mais de um ....

6) Identifique nas figuras que o professor fará no quadro negro as funções sobrejetoras.

7) Identifique nas figuras que o professor fará no quadro negro as funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras.

Função Inversa

Seja f uma função **bijetora** de A em B, então é possível definir uma nova função com **domínio B** e **contradomínio A** que associa a cada elemento y = f(x) $\in$ B um único elemento $x \in A$. Essa nova função, denotada por $\mathbf{f^{-1}}$, é **chamada de função inversa de f**. E, então, $f^{-1} = \{(y; x) \mid (x; y) \in f\}$.

Exercícios 10

1) Seja f(x) = y = 3x – 1, com $x \in R$. Determine a função inversa de f, $f^{-1}(y)$.

2) Seja f(x) = y = sen(x), com $x \in [0;\ \pi/2]$. Escreva a função $f^{-1}(y)$.

3) Seja f(x) = y = sen(x) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, com $x \in [0;\ \pi/2]$. Qual o valor de $f^{-1}(y)$?

4) Seja f(x) = y = cos(x) = $\frac{1}{2}$, com $x \in [0;\ \pi/2]$. Qual o valor de $f^{-1}(y)$?

5) Seja f(x) = y = ln(x). Qual a função inversa de f(x), $f^{-1}(y)$?

6) Seja f(x) = y = $\ell n(x)$ = 0,5, com $x \in [1; 2]$. Qual o valor da inversa $f^{-1}(y)$ = $f^{-1}(0{,}5)$?

7) Seja f(x) = y = log(x), com $x \in R_{+}^{*}$. Qual a função inversa de f(x), $f^{-1}(y)$?

8) Seja f(x) = y = log(x) = 0,3010. Qual o valor da inversa de f(x), em 0,3010, ou seja, $f^{-1}(0{,}301030)$?

Função Composta

Dadas as funções **f** e **g,** chama-se **função composta** de **f** com **g** a função denotada por $f \circ g$ e definida por $\mathbf{f \circ g(x) = f[g(x)]}$.

Exercícios 11

Seja as funções f(x) = x + 3 e g(x) = 3x – 5. Determine:

a) $f \circ g$;
b) $g \circ f$;

c) $f \circ g$ para $x = 1$.

1.5- Funções Importantes

FUNÇÃO POLINOMIAL DO $1^{0.}$ GRAU
Toda função definida de R em R por $f(x) = ax + b$, com $b \in R$ e $a \in R^*$, é denominada função **polinomial do $1^{0.}$ grau**.

Exercícios 12
1) Dada a função linear $f(x) = 2x + 1$, pede-se:
a) O zero da função.
b) O coeficiente angular da reta que a função representa.
c) O coeficiente linear da reta que a função representa.

2) Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(1; 2) e é paralela a reta representada pela função do exercício 1.

3) Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(1; 2) e é perpendicular a reta representada pela função do exercício 1.

FUNÇÃO POLINOMIAL DO $2^{0.}$ GRAU
Toda função definida de R em R por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $b, c \in R$ e $a \in R^*$, é denominada função **polinomial do $2^{0.}$ grau ou função quadrática (trinômio do $2^{0.}$ grau).**

Exercícios 13
1) Dada a função do $2^{0.}$ grau $f(x) = x^2 – 5x + 4$, pede-se:
a) As raízes da função, ou seja, os valores de x que anulam f(x).
b) O intervalo de x para o qual o polinômio é positivo.
c) O intervalo de x para o qual o polinômio é negativo.

2) Dada a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine:
a) A soma das raízes da função.
b) O produto das raízes da função.

3) Seja a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida de R em R. O gráfico dessa função é uma curva chamada parábola. Assim, complete o texto adiante o tornando verdadeiro.

a) Quando $a > 0$ a **concavidade** da curva está voltada para ....
b) Quando $a < 0$ a **concavidade** da curva está voltada para ....

4) Faça os gráficos das seguintes funções do $2^{0.}$ grau.

a) $f(x) = x^2 – 4x + 3$
b) $f(x) = -x^2 + x + 2$

5) Resolva as inequações do $2^{0.}$ grau seguintes;

a) $x^2 + 5x - 24 \geq 0$
b) $-x^2 + 3x + 4 > 0$

6) Faça esboços dos gráficos das funções do $2^{o.}$ grau cujos parâmetros são:
a) $a > 0$ e $\Delta > 0$;
b) $a < 0$ e $\Delta > 0$;
c) $a > 0$ e $\Delta = 0$;
d) $a < 0$ e $\Delta = 0$;
e) $a > 0$ e $\Delta < 0$;
f|) $a < 0$ e $\Delta < 0$.

FUNÇÃO MODULAR

Uma função $f: R \rightarrow R$ é denominada de **função modular** quando é definida por $f(x) = |x|$.

OBS. Lembre que **módulo** ou **valor absoluto** de um número é a **distância** da imagem desse número na reta orientada até a origem da reta. Veja que $|5|$ é igual à distância de 5 a origem 0, logo $|5| = 5$. Por outro lado, $|-7|$ igual à distância de -7 a origem 0, logo $|-7| = 7$. Como você sabe distância é sempre um número positivo.

Exercícios 14

1) Faça o gráfico da função $f(x) = |x|$.

2) Observando o gráfico do exercício anterior se conclui que o conjunto imagem da função modular é o conjunto dos reais não ...., ou seja, $Im(f) = R_+$.

3) Observando o gráfico do exercício 1 se conclui que o conjunto domínio da função modular é o conjunto dos reais ...., ou seja, $D(f) = R$.

4) Faça os gráficos de $y = |f(x)|$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = -x^2 + 3x$

5) Dada a função $f(x) = x^2 - 3$, faça o gráfico de $y = |x^2 - 3| -3$.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função é chamada de exponencial quando é definida por $f(x) = a^x$, de R em R, com $a \in R_+^*$ e $a \neq 1$.

Exercícios 15

1) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$.

2) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^{-x}$.

3) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$.

4) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = e^{-x}$.

5) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 4e^x$.

6) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 5e^{-x}$.

7) Uma variável aleatória X tem função densidade de probabilidade dada por $f(x) = 5e^{-5x}$ $x > 0$. Faça o gráfico dessa função.

FUNÇÃO EXPONENCIAL: CRESCENTE E DECRESCENTE

Dada uma função exponencial definida por $f(x) = a^x$, de R em R, com $a \in R_+^*$ e $a \neq 1$ existem dois tipos de comportamento para o gráfico dessa função. O tipo depende do valor da base da exponencial a. Assim, tem-se:

$1^{0.}$) Se $a > 1$ tem-se uma função exponencial crescente.

$2^{0.}$) Se $0 < a < 1$ tem-se uma função exponencial decrescente.

Exercícios 16

1) Identifique as sentenças verdadeiras e marque V e as falsas marque F.

a) $f(x) = 6^x$ é uma função crescente por que a base a = 6 é maior que 1 (   )

b) $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ é uma função crescente por que a base $a = \frac{1}{4}$ é menor que 1 (   )

c) $(\frac{3}{2})^{0,3} > (\frac{3}{2})^{0,2}$ (   )

d) $(\frac{2}{3})^{0,3} > (\frac{2}{3})^{0,2}$ (   )

e) $(0,8)^{0,7} > (0,8)^{0,5}$ (   )

f) $(3)^{0,7} > (3)^{0,5}$ (   )

Exercícios 17

Classifique as funções adiante em par ou impar ou sem paridade; crescente ou decrescente ou constante.

1) $f(t) = t^2$ $t \in R$

2) $g(t) = -t^2$ $t \in R$

3) $f(x) = e^{-x}$ $x \in R_+^*$

4) $f(x) = -e^{-x}$ $x \in R_+^*$

5) $g(x) = x^2 - 3$ $x \in R$

6) $h(x) = 7 \quad x \in R$

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é denominada de equação exponencial quando a incógnita situa-se no expoente.

Exemplos:

1) $2^x = 16$

2) $3^{x-2} = \frac{1}{9}$

Exercícios 18

Resolva as equações exponenciais dos exemplos anteriores e as que seguem.

1) $2^{2x} - 3.2^x + 2 = 0$

2) $3^x = 243$

Exercícios 19

Resolva os sistemas de equações exponenciais que seguem.

1) $\begin{cases} 2^{x+y} = 8 \\ 2^{x-y} = 32 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^x.4^y = 64 \\ \dfrac{2^x}{4^y} = 4 \end{cases}$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma função f(x) definida de R_+^* em R por $f(x) = \log_a(x)$ com $a \in R_+^*$ e $a \neq 1$.

OBS.: 1) A função logarítmica é crescente se a > 1 e é decrescente se a < 1.
2) A função logarítmica é bijetora, logo admite inversa.

Exercícios 20

1) Faça o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2(x)$ e determine a sua inversa.

2) Faça o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_{1/2}(x)$ e determine a sua inversa.

3) Calcule o valor de $\log(\sqrt[3]{20})$, sabendo que $\log(2) = 0,3010$.

4) Determine as condições de existência de $\log(x^2 + 3x)$.

2. LIMITES

Definição

Seja uma função f definida em um intervalo aberto que contém o ponto **a**, exceto possivelmente no próprio ponto **a**. O limite de f(x) quando x se aproxima de **a** é L. Assim, tem-se:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

e isto significa que $\forall \varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e ainda se f(x) tem limite quando x tende para **a**, então tal limite é único.

Propriedades importantes:

1ª.) $\lim_{x \to a} c = c$ com c uma constante, ou seja, um real.

2ª.) $\lim_{x \to a} x = a$

3ª.) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

4ª.) $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

5ª.) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x)$, com $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

6ª.) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

7ª.) $\lim_{x \to a} f(x)^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$, desde que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista.

INDETERMINAÇÕES

As formas indeterminadas ou indeterminações são as seguintes:

1ª.) $\frac{0}{0}$ 2ª.) $\frac{\infty}{\infty}$ 3ª.) $0 \times \infty$ 4ª.) $\infty - \infty$ 5ª.) 0^0 6ª.) ∞^0 7ª.) 1^∞

EXERCÍCIOS 21: Calcule os limites

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x+4)^5$ R.: 100000

2) $\lim\limits_{x \to a} x^3$ R.: a^3

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x+4}{5x+7}$ R.: 10/17

4) $\lim\limits_{x\to 2} (3x^2 + 2x + 4)$

R.: 20

5) $\lim\limits_{x\to 2} [(3x^2 + 2)(x + 4)]$ R.: 84

EXERCÍCIOS 22

1) Dada a função f(x) = $\dfrac{x^3 + x - 10}{x-2}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de -5 a 5.

b) Calcule o limite da função quanto x vai para 2, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x - 10}{x-2}$ R.: 13

2) Dada a função f(x) = $\dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de -5 a 5.

b) O valor da função em x = 1. R.: $\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

c) O limite da função quando x tende para 1, ou seja, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1}$

R.: -8

3) Dada a função f(x) = $\dfrac{2}{1+e^{-1/x}}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de 0 a 100.

b) O valor da função em x = ∞. R.: 1

c) O limite da função quando x tende para $+\infty$, ou seja, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{1 + e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}$ R.: 1

4) Dada a função f(x) = x^3 -3x +2 pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de -5 a 5.

b) O valor da função em x = 0. R.: 2

c) O limite da função quando x vai para 0, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0} x^3 - 3x + 2$ R.: 2

5) Dada a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de -2 a 6.

b) O valor da função em x = 4. R.: $\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

c) O limite da função quando x vai para 4, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$ R.: -1/4

6) Demonstre que o limite da função $\dfrac{sen(x)}{x}$ quando x vai para 0 é igual a 1, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

7) Dada $f(x) = \dfrac{\text{sen}(ax)}{bx}$ com $b \neq 0$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: a/b

8) Dada $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{\text{sen}(x)}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: 0

9) Dada $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}(x)} - \dfrac{1}{\text{tg}(x)}$ calcule o limite da função quando x vai para 0.

R.: 0

10) Dada $f(x) = \dfrac{\text{sen}^2(x)}{x}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: 0

11) Dada $f(x) = \dfrac{\text{tg}(x)}{x}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: 1

12) Dada $f(x) = \dfrac{\text{sen}(kx)}{x}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: k

13) Dada $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x - 2\pi}$ calcule o limite da função quando x vai para 2π. R.: 1

14) Calcule o limite da função $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 2x - 8}$ quando x vai para 1. R.: -1

15) Calcule o limite da função $\dfrac{e^x - 1}{x}$ quando x vai para 0, ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

R.: 1

16) Calcule o limite da função f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ quando x vai para 2. R.: -4

17) Demonstre que $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ (número de Euler e = 2,718281828). R.: e

18) Demonstre que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ (número de Euler e = 2,718281828). R.: e

19) Demonstre que $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$.

20) Demonstre que $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{k}{x})^x = e^{-k}$.

21) Demonstre que $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+k} = e$.

22) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ell n(1+x)}{x})$. R.: 1

23) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{\ell n(x)}{x-1})$. R.: 1

24) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x-1)}{\ell n(x)})$. R.: 1

25) Demonstre que o limite da função $(1 + ax)^{1/x}$ quando x vai para 0 é igual a e^a, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0}\ (1+a\,x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^a$.

26) Calcule o limite da função g(x) = $\dfrac{x^2-4x+2}{x^3-x^2-x+1}$ quando x vai para 1. R.: -

∞

27) Calcule $\begin{array}{c}\ell im\\ h\to 0\end{array}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ R.: 1/4

28) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{\sqrt{x}}$

R.: 0

29) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(3x)}{x}$ R.: 3

30) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{6x-sen(2x)}{2x+3sen(4x)})$ R.: 2/7

31) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right)$ R.: 0

32) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{sen}(x)}-\dfrac{1}{\text{tg}(x)}\right)$ R.: 0

33) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ R.: e

34) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ R: e

35) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{(x+k)}$

36) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1+x)}{x}$ R.: 1

37) Dada a função f(x) = $\dfrac{2x^3+5x^2+x+1}{x^3+5x-7}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞). R.: 2

38) Dada a função f(x) = $\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+2}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞).

39) Dada a função f(x) = $\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+2}$ calcule o limite da função quando x vai para menos infinito ($-\infty$). R.: 0

40) Dada a função f(x) = $\dfrac{2x^5+x-2}{-3x^2+x+5}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞). R.: $-\infty$

41) Dada a função f(x) = $\dfrac{x^3+8}{3x^2+5x+1}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞). R.: ∞

42) Dada a função f(x) = $\dfrac{x^4+2x^2+3}{x^2-x-1}$ calcule o limite da função quando x vai para menos infinito ($-\infty$). R.: ∞

43) Dada a função f(x) = $\dfrac{3x^3+2x-1}{2x^2-x+3}$ calcule o limite da função quando x vai para menos infinito ($-\infty$). R.: $-\infty$

44) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{\ell n(1+x)^2}{x})$. R.: 0

45) Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} (1+\frac{2}{x})^x$. R.: e^2

46) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{\ell n(x^3)}{x-1})$. R.: 3

47) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{2x-2)}{\ell n(x)})$. R.: 2

48) Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^{x+3}$. R.: e

49) Prove que $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{a^x - 1)}{x}) = \ell n(a)$ com a > 0.

50) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{e^x - 1)}{2x})$. R.: 1/2

51) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{2^{x-1} - 1)}{x-1})$. R.: $\ell n(2)$

52) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{e^x - 1)}{sen(x)})$. R.: 1

53) Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} (x(\sqrt[x]{e} - 1))$. R.: ∞

54) Prove que $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{(1+x)^a - 1)}{x}) = a$ com $a \neq 0$.

55) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{(1+x)^m - 1)}{mx})$. R.: 1

56) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} [\ell n(\frac{(1+x)^e - 1)}{x})]$. R.: 1

57) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} [\ell n(\frac{x^e - 1)}{x-1})]$. R.: 1

58) Uma **função distribuição de probabilidade** de uma variável aleatória X, F(x), tem a seguinte propriedade: quando a variável (aleatória) vai para $-\infty$ o valor da função vai para zero e quando a variável (aleatória) vai para ∞ o valor da função vai para 1. Verifique se a função $F(x) = 1 - e^{-2x}$ $x > 0$ é função distribuição de probabilidade da variável X, observando que o "menos infinito, $-\infty$" da variável X é 0, que corresponde ao menor valor do contradomínio.

59) Uma **função distribuição de probabilidade** de uma variável aleatória X, F(x), tem a seguinte propriedade: quando a variável (aleatória) vai para $-\infty$ o valor da função vai para zero e quando a variável (aleatória) vai para ∞ o valor da função vai para 1. Verifique se a função $F(x) = 1 - e^{-\theta x}(1+\theta x)$ $x > 0$ é função distribuição de probabilidade da variável X, observando que o "menos infinito, $-\infty$" da variável X é 0, que corresponde ao menor valor do contradomínio.

60) Verifique se a função $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ $x \in [a; b]$ e $a < b$ é uma função de distribuição com base na propriedade enunciada nos dois últimos exercícios. Veja que o "menos infinito" dessa variável é **a** (seu menor valor no contradomínio) e o "mais infinito" é **b** (o seu maior valor no contradomínio).

61) Verifique se a função $F(x) = x$ $x \in [0; 1]$ é uma função de distribuição com base na propriedade enunciada nos últimos exercícios. Veja que o "menos infinito" dessa variável é **0** (seu menor valor no contradomínio) e o "mais infinito" é **1** (o seu maior valor no contradomínio).

62) Verifique se a função $F(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ $x > 0$ é uma função de distribuição com base na propriedade enunciada nos últimos exercícios. Veja que o "menos infinito" dessa variável é **0** (seu menor valor no contradomínio) e o "mais infinito" é ∞**.**

3. DERIVADAS

Definição
Seja uma função f definida no intervalo aberto (a; b). Se a < x < b, a derivada da função primitiva f no ponto x é dada por: f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ desde que o limite exista. Se f'(x) existe para todos os valores no intervalo (a, b), então f é chamada diferençável em (a, b).

Propriedades importantes:

1ª.) Se f(x) = c, então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = 0

2ª.) Se f(x) = ax + b, então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = a.

3ª.) Se f(x) = x^m, então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = $mx^{m-1.}$

4ª.) A derivada de cf(x) é cf'(x) = c$\frac{df(x)}{dx}$.

5ª.) A derivada da soma f(x) + g(x) é igual a f'(x) + g'(x), ou seja, se y = u + v, então y' = u' + v'.

6ª.) A derivada do produto f(x)g(x) é igual a f(x)g'(x) + f'(x)g(x), ou seja, y = u.v, então y' = uv'+ u'v.

6ª.) A derivada do quociente y = $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u}{v}$ é igual a y' = $\frac{vu' - uv'}{v^2}$.

7ª.) Se f(x) = sen(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = cos(x).

8ª.) Se f(x) = cos(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = -sen(x)

9ª.) Se f(x) = tg(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = $sec^2(x) = (1 + tg^2(x))$.

10ª.) Se f(x) = cotg(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = $-cosec^2(x) = -(1 + cotg^2(x))$.

11ª.) Se f(x) = sec(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = sec(x)tg(x).

12ª.) Se f(x) = cosec(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = -cosec(x)cotg(x)

13ª.) Se y = u e u = f(x), então y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

14ª.) Se y = arcsen(u), então y' = $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

15ª.) Se y = arccos(u), então y' = $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

16ª.) Se y = arctg(u), então y' = $\frac{u'}{1+u^2}$.

17ª.) Se y = arccotg(u), então y' = $\frac{-u'}{1+u^2}$.

18ª.) Se y = arcsec(u), então y' = $\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$.

19ª.) Se y = arccosec(u), então y' = $\frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$.

20ª.) Função Exponencial: y = a^u , u = f(x), y' = a^uln(a)u'.

21ª.) Função Logaritmica: y = $\log_a$(u), u = f(x), y' = $\frac{u'}{u\ln(a)}$ **OBS. $\log_a$(e) =**

$\frac{1}{\ln(a)}$**.**

22ª.) Função Exponencial Geral: y = u^v , u = f(x) e v = f(x), y' = vu^{v-1}u' + $u^v \ell n$ (u).v'.

REGRA DE L'HOSPITAL

Quando se tem para x = a (finito ou infinito) as funções f(x) e g(x) tendendo para **zero** ou **infinito** e fazendo com que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ assuma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

EXERCÍCIOS 23

Verifique em todos os exercícios anteriores sobre limites aqueles em que ocorrem indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e aplique a Regra de L'Hospital.

EXERCÍCIOS 24

1) Seja a função y = f(x) = 2π, calcule a derivada de f(x). R.: 0

2) Seja a função y = sen(kπ), calcule a derivada de y. R.: 0

3) Seja a função y = sen(kπx), calcule a derivada de y. R.: cos(kπx) kπ

4) Seja a função $y = \frac{x+1}{x}$, calcule a derivada de y. R.: $\frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$

5) Seja a função $y = \frac{k}{x}$, calcule a derivada de y. R.: $-\frac{k}{x^2}$

6) Seja a função $y = x^2$, calcule a derivada de y. R.: 2x

7) Seja a função $y = (x+3)^5$, calcule a derivada de y. R.: $5\,(x+3)^4$

8) Seja a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 7$, calcule a derivada de f(x).
R.: $3\,x^2 - 10\,x + 2$

9) Seja a função $y = \sqrt{x^2+1}$, calcule a derivada de y. R.: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

10) Seja a função $y = \sqrt[4]{8x^3}$, calcule a derivada de y. R: $\frac{3}{4}\frac{8^{(1/4)}\,x^2}{(x^3)^{(3/4)}}$

11) Seja a função $y = \pi^{2x}$, calcule a derivada de y. R.: $2\,\pi^{(2\,x)}\ln(\pi)$

12) Seja a função $f(x) = e^{x+2} - e^x$, calcule a derivada de f(x). R.: $e^{(x+2)} - e^x$

13) Seja a função $f(x) = \ell n(x)$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{1}{x}$

14) Seja a função f(x) = $\ell n(2x^2)$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{2}{x}$

15) Seja a função f(x) = $\ell og_a(x^2 - 2x + 1)$, calcule a derivada de f(x).

R.:

$$\frac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 1)\ln(a)}$$

16) Seja a função y = [ℓn (x)]^x, calcule a derivada de y.

R.:

$$\ln(x)^x \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

17) Seja a função y = x^x, calcule a derivada de y. R.:

$x^x (\ln(x) + 1)$

18) Seja a função y = sen(x^2), calcule a derivada de y. R.:

$2 \cos(x^2)\, x$

19) Seja a função y = sen^2(x), calcule a derivada de y. R.:

2sen(x)cos(x)

20) Seja a função y = cos(ℓn(x)), calcule a derivada de y. R.:

$$-\frac{\sin(\ln(x))}{x}$$

21) Seja a função y = cos^2(x), calcule a derivada de y. R.: -

2sen(x)cos(x)

22) Seja a função y = 1- cos^2(x), calcule a derivada de y. R.:

2sen(x)cos(x)

23) Seja a função f(x) = x^3 – x -1, calcule a derivada de f(x). R: $3x^2 - 1$

24) Seja a função f(x) = $\frac{-2}{x}$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{2}{x^2}$

25) Seja a função y = $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$, calcule a derivada de y. R.:

$$2\sqrt{x} - \frac{x^2 + 1}{2\, x^{(3/2)}}$$

26) Seja a função y = 2xe^x, calcule a derivada de y. R.: $2\, e^x + 2\, x\, e^x$

27) Seja a função f(t) = $\sqrt{3t}$, calcule a derivada de f(t). R.: $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}$

28) Seja a função f(x) = $\ell n(x^2)$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{2}{x}$

29) Seja a função f(x) = π^x, calcule a derivada de f(x). R.: $\pi^x \ln(\pi)$

30) Seja a função y = log(x^2 + 1), calcule a derivada de y. R.: $\frac{2x}{(x^2+1)\ln(10)}$

31) Seja a função y = x^{x+1}, calcule a derivada de y. R.:

$x^{(1+x)}\left(\ln(x)+\frac{1+x}{x}\right)$

32) Seja a função y = x - $\ell n(e^x)$ + 2sen(π), calcule a derivada de y. R.: 0

33) Seja a função y = sen(5x), calcule a derivada de y. R.: $5\cos(5x)$

34) Seja a função y = $x^2 + e^x$, calcule a derivada de y. R.: $2x + e^x$

35) Seja a função z = f(y) = cos(y^2) + y^5, calcule a derivada de z.

R.:

$-2\sin(y^2)\,y + 5y^4$

36) Seja a função f(t) = $t^3 + t^2 + \ell n(t)$, calcule a derivada de f(t) no ponto t = 1,

ou seja, $\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=1}$. R.: 6

37) Seja a função g(x) = x.e^x. $\ell n(x)$ + sen(e^x), calcule a derivada de g(x).

R.:

$$e^x\ln(x) + x\,e^x\ln(x) + e^x + \cos(e^x)\,e^x$$

38) Seja a função y = $\sqrt{x^2+1}$, calcule a derivada de y. R.:

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

39) Seja a função y = $\sqrt[3]{x}$, calcule a derivada de y. R.:

$\frac{1}{3x^{(2/3)}}$

40) Seja a função y = π^{2x}, calcule a derivada de y. R.:

$2\pi^{(2x)}\ln(\pi)$

41) Um balão esférico está sendo inflado. Determine a taxa na qual o volume V do balão varia em relação ao seu raio R.

42) Seja a função y = f(x) = $\sqrt{x}$, calcule a derivada de y. R.: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

43) Calcule o valor da derivada obtida no item anterior no ponto x = 4, ou seja,

$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=4}$. R.: 1/4

44) Seja a função y = f(x) = $\frac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$, calcule a derivada de y.

R.: $\frac{6x-1}{4x^2+5} - \frac{8(3x^2-x+2)x}{(4x^2+5)^2}$

45) Calcule o valor da derivada obtida no item anterior no ponto x = 0, ou seja,

$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0}$. R.: -1/5

46) Determine a equação da tangente (reta tangente) ao gráfico da função f(x) = $\frac{5}{1+x^2}$ no ponto com coordenadas (-2, 1), ou melhor, no ponto P(-2, 1).

47) Determine a equação da tangente ao gráfico da função f(x) = $3x^2 - 2\sqrt{x}$ no ponto com coordenadas (4, 44), ou melhor, no ponto P(4, 44).

48) Seja a função y = f(x) = sen(x+1).cos(x-1), calcule o valor da derivada de y no ponto x = 0.

R.: 1

49) Seja a função y = arctg($\frac{1+x}{1-x}$), calcule o valor da derivada de y no ponto x = 1.

50) Calcule o coeficiente angular da tangente à curva y = $x^2 - 5x + 7$ no ponto x = 3.

51) Calcule a inclinação da curva y = 10^x no ponto x = 2.

52) Determine as coordenadas dos pontos da curva y = $x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ em que a tangente a curva, nesses pontos, é:

a) horizontal;

b) paralela à reta 2y + 8x = 5.

53) Seja y = f(x) = $\frac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)}$, calcule y’.

54) Seja a função g(x) = sec(x).tg(x), calcule g’(x).

55) Determine o coeficiente angular das tangentes à curva y = sen(x) nos pontos com abscissas: x = 0, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ e π.

56) Determine a equação da normal à curva y = tg(x) no ponto $P(\frac{\pi}{4}, 1)$.

57) De um balão a 150 m acima do solo cai um saco de areia. Desprezando-se a resistência do ar, a distância s(t) do solo ao saco em queda, após t segundos é dada por $s(t) = -4{,}9t^2 + 150$. Determinar a velocidade do saco nos seguintes casos:

a) quando t = a segundos;

b) quando t = 2 segundos;

c) quando s = 0 (distância ao solo);

58) Uma função densidade de probabilidade, f(x), de uma variável aleatória X corresponde à **derivada** da função distribuição de probabilidade, F(x), dessa variável aleatória. Sendo assim, se $F(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ $x > 0$, calcule a função densidade de probabilidade de X.

59) Uma função densidade de probabilidade, f(x), de uma variável aleatória X corresponde à **derivada** da função distribuição de probabilidade, F(x), dessa variável aleatória. Sendo assim, se $F(x) = 1 - e^{-5x}$ $x > 0$, calcule a função densidade de probabilidade de X.

60) Calcule a função densidade de probabilidade, f(x), da variável aleatória X dada a função distribuição de probabilidade $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ $x \in [a; b]$ e $a < b$.

61) Calcule a função densidade de probabilidade, f(x), da variável aleatória X dada a função distribuição de probabilidade F(x) = x com $x \in [0; 1]$.

4. INTEGRAL

Função Primitiva: Dada uma função f(x) definida no intervalo [a; b], chama-se função primitiva de f(x) a toda função g(x), também definida em [a; b] e cuja derivada g'(x) = f(x) em todo intervalo [a; b]. Toda função contínua admite uma primitiva.

Teorema: Se g(x) é uma primitiva de f(x), então g(x) + c onde c é uma constante é, também, uma primitiva de f(x).

Integrais Imediatas:

1ª.) $\int dx = x + c$

2ª.) $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c$

3ª.) $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c$ com u = f(x).

4ª.) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$

5ª.) $\int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du = \dfrac{2}{3}\sqrt{u^3} + c$, com u = f(x).

6ª.) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ell n(a)} + c$, com u = f(x).

7ª.) $\int a^u \ell n(a) du = a^u + c$, com u = f(x).

8ª.) $\int e^u du = e^u + c$, com u = f(x).

9ª.) $\int \dfrac{du}{u} = \ell n(u) + c$, com u = f(x).

10ª.) $\int \cos(u) du = \text{sen}(u) + c$, com u = f(x).

11ª.) $\int \text{sen}(u) du = -\cos(u) + c$, com u = f(x).

12ª.) $\int \sec^2(u) du = \text{tg}(u) + c$, com u = f(x).

13ª.) $\int \text{cosec}^2(u) du = -\text{cotg}(u) + c$, com u = f(x).

14ª.) $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}(u) + c$, com u = f(x).

ou $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ = -arccos(u) + c , com u = f(x).

15ª.) $\int \frac{du}{1+u^2}$ = arc tg(u) + c , com u = f(x).

ou $\int \frac{du}{1+u^2}$ = -arc cotg(u) + c , com u = f(x).

EXERCÍCIOS 25: INTEGRAL INDEFINIDA.

1) Seja f(x) = x, calcule a integral indefinida de f(x).

2) Seja f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$, calcule a integral indefinida de f(x).

3) Calcule a integral indefinida $\int e^{ax}$ dx, com a $\in$ R.

4) Seja y = 2cos(x), calcule a integral indefinida de f(x).

5) Calcule a integral indefinida $\int \frac{3}{x}$ dx.

6) Seja f(x) = $5x^4$, calcule a integral indefinida de f(x).

7) Seja y = $-2x^3$, calcule a integral indefinida de y.

8) Calcule a integral indefinida $\int -\operatorname{sen}(x)\,dx$.

9) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}}$.

10) Seja o polinômio f(x) = x^2 -2x + 5, calcule a integral indefinida de f(x).

11) Calcule a integral indefinida $\int 5\,dx$.

12) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{2}$.

13) Calcule a integral indefinida $\int x^3$ dx.

14) Calcule a integral indefinida $\int 2x^5$ dx.

15) Calcule a integral indefinida $\int \frac{1}{\pi} x^5$ dx.

16) Calcule a integral indefinida $\int 3\sqrt{x}$ dx.

17) Calcule a integral indefinida $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ dx.

18) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{x^3}$.

19) Calcule a integral indefinida $\int \frac{5}{3} x^{2/3}\, dx$.

20) Calcule a integral indefinida $\int 2x^{-3}\, dx$.

21) Calcule a integral indefinida $\int \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx$.

22) Calcule a integral indefinida $\int 2^{x}\, dx$.

23) Calcule a integral indefinida $\int 3\sqrt{10x}\, dx$.

24) Calcule a integral indefinida $\int 3e^{3x}\, dx$.

25) Calcule a integral indefinida $\int e^{\text{sen}(x)} \cos(x)dx$.

26) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2xdx}{x^2}$.

27) Calcule a integral indefinida $\int 3e^{x}\, dx$.

28) Calcule a integral indefinida $\int 2e^{-x}\, dx$.

29) Calcule a integral indefinida $\int e^{2x}\, dx$.

30) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2dx}{e^x}$.

31) Calcule a integral indefinida $\int \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} dx$.

32) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$.

33) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{x\ell n(x)}$.

34) Calcule a integral indefinida $\int 2\cos(2x)dx$.

35) Calcule a integral indefinida $\int \text{sen}(x^2)2xdx$.

36) Calcule a integral indefinida $\int -3\text{sen}(3x)dx$.

36) Calcule a integral indefinida $\int 2\sec^2(x)dx$.

37) Calcule a integral indefinida $\int -2\operatorname{cosec}^2(x)dx$.

38) Calcule a integral indefinida $\int 2\sec^2(2x)dx$.

39) Calcule a integral indefinida $\int \sec^2(2x)dx$.

40) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

41) Calcule a integral indefinida $\int \frac{3dx}{1+x^2}$.

42) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{2+2x^2}$.

43) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{\sqrt{9-9x^2}}$.

44) Calcule a integral indefinida $\int (x^2+x+1)dx$.

45) Calcule a integral indefinida $\int (2x+1)dx$.

46) Calcule a integral indefinida $\int (6x^5-8x^3-2x)dx$.

47) Calcule a integral indefinida $\int (e^x+e^{-x}+x-1)dx$.

48) Calcule a integral indefinida $\int (\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-3\sqrt{x})dx$.

49) Calcule a integral indefinida $\int (e^x+2^x)dx$.

50) Calcule a integral indefinida $\int (\cos(x)+\operatorname{sen}(x))dx$.

51) Calcule a integral indefinida $\int (\sec^2(x)-\operatorname{cosec}^2(x))dx$.

52) Calcule a integral indefinida $\int (\frac{1}{1+x^2}+\sec^2(x))dx$.

53) Calcule a integral indefinida $\int (\frac{1}{1+x^2}+\operatorname{cosec}^2(x))dx$.

54) Calcule a integral indefinida $\int (\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$.

55) Calcule a integral indefinida $\int \operatorname{tg}(x)dx$.

56) Calcule a integral indefinida $\int \sec^2(\frac{x}{2})dx$.

57) Calcule a integral indefinida $\int \sqrt{3+x^2}.xdx$.

EXERCÍCIOS 26: INTEGRAL DEFINIDA.

1) Dada a função $f(x) = x^2$, calcule a integral definida de f(x) de 0 a 4, ou seja,

$\int_0^4 x^2dx$.

2) Dada a função y = sen(x), calcule a integral definida de y de 0 a $\frac{\pi}{2}$, ou seja,

$\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{sen}(x)dx$.

3) Dada a função f(x) = x^5, calcule a integral definida $\int_{0}^{2} x^5 dx$.

4) Dada a função f(z) = $\sqrt[3]{z}$ calcule a integral definida $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{z}dz$.

5) Dada a função y = a^u, calcule a integral definida $\int_{0}^{2} a^u du$.

6) Dada a função f(s) = $(3s + 4)^2$, calcule a integral definida $\int_{-5}^{5} (3s+4)^2 ds$.

7) Dada a função f(s) = $(3s + 4)^2$, calcule a integral definida $\int_{-5}^{5} (3s+4)^2 ds$.

8) Calcule $\int_{-3}^{1} dx$.

9) Calcule $\int_{-2}^{-1} x^2 dx$.

10) Calcule $\int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(x)dx$.

11) Calcule $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$.

12) Calcule $\int_{0}^{\pi} 2\cos(x)dx$.

13) Calcule $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$.

14) Calcule $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$.

15) Calcule $\int_{3}^{3} \frac{dx}{1+x^2}$.

16) Calcule $\int_{0}^{\pi} \cos(2x)dx$.

17) Calcule $\int_{0}^{\pi} \cos(5x)dx$.

18) Calcule $\int_{0}^{\pi} \text{sen}(2x)dx$.

19) Calcule $\int_{0}^{\pi} \text{sen}(3x)dx$.

20) Calcule $\int_{0}^{\pi} \text{sen}(6x)dx$.

21) Calcule $\int_{0}^{2\pi} \cos(2x)dx$.

22) Calcule $\int_{0}^{2\pi} \cos(3x)dx$.

23) Calcule $\int_{0}^{2\pi} \text{sen}(2x)dx$.

24) Uma função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X pode ser obtida integrando-se a função densidade de probabilidade do menor valor do contradomínio de X até um valor específico x. Dada a função densidade de probabilidade $f(x) = 5e^{-5x}$ $x > 0$. Determine a função distribuição de X.

25) Uma função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X pode ser obtida integrando-se a função densidade de probabilidade do menor valor do contradomínio de X até um valor específico x. Dada a função densidade de probabilidade $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ $x > 0$. Determine a função distribuição de X.

26) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é $f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in [a; b]$ $a < b$.

27) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é $f(x) = 1$ $x \in [0; 1]$.

28) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ com $x \in [0; 1]$, $\theta > 0$.

29) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é $f(x) = 1{,}5x^2$ com $x \in [-1; 1]$.

30) Uma função densidade de probabilidade é sempre não negativa, ou seja, $f(x) \geq 0$ e a integral definida da função é sempre igual a l. Então, verifique se $f(x) = 1{,}5x^2$ com $x \in [-1; 1]$ é uma função densidade de probabilidade.

31) Verifique se a função $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ com $x \in (0; \infty)$, $\theta > 0$, é uma função densidade de probabilidade.

32) Verifique se a função $f(x) = 1$ com $x \in [0; 1]$, é uma função densidade de probabilidade.

33) Verifique se a função $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ com $x > 0$, é uma função densidade de probabilidade.

34) Verifique se a função $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ com $x \in [a; b]$ $a < b$ é uma função densidade de probabilidade.

35) Verifique se a função $f(x) = x^2$ com $x \in [1; 5]$ é uma função densidade de probabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. Ayres, Frank Jr. & Mendelson – Cálculo Dif. e Integral; 4ª. Edição, Coleção Schaum, Bookman, Porto Alegre, 2005.
2. Cálculo: Funções de Uma Variável. Morettin, P. A.; Bussab, W. O. & Hazzan, S. Atual Editora.
3. Álgebra de Matrizes com Aplicações em Estatística. Iemma, A. F.
4. Matrix Algebra Useful for Statistics. Searle S. R. John Wiley & Sons.