EXERCÍCIOS

1. Sejam $\mathbf{x} = (-1, -1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (1, 1, 5, -3)^T$. Mostre que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Calcule $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{y}\|_2$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.

2. Seja $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (8, 2, 2, 0)^T$.
(a) Encontre o ângulo θ entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(b) Encontre a projeção vetorial $\mathbf{p}$ de $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y}$.
(c) Verifique que $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ é ortogonal a $\mathbf{p}$.
(d) Calcule $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|_2$, $\|\mathbf{p}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_2$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.

3. Seja $\mathbf{w} = (1/4, 1/2, 1/4)^T$ e use a Equação (1) para definir um produto interno em R^3. Sejam $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ e $\mathbf{y} = (-5, 1, 3)^T$.
(a) Mostre que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais em relação a esse produto interno com peso.
(b) Calcule os valores de $\|\mathbf{x}\|$ e $\|\mathbf{y}\|$ para esse produto interno.

4. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de cada uma das expressões a seguir.
(a) $\langle A, B \rangle$ (b) $\|A\|_F$ (c) $\|B\|_F$ (d) $\|A + B\|_F$ ver pg. 168

5. Mostre que a Equação (2) define um produto interno em $R^{m\times n}$.

6. Mostre que o produto interno definido pela Equação (3) satisfaz as duas últimas condições na definição de produto interno.

7. Para $C[0, 1]$ com produto interno definido por (3), calcule:

$$\text{(a) } \langle e^x, e^{-x} \rangle \qquad \text{(b) } \langle x, \operatorname{sen} \pi x \rangle \qquad \text{(c) } \langle x^2, x^3 \rangle$$

8. Para $C[0, 1]$ com produto interno definido por (3), considere os vetores 1 e x.
(a) Encontre o ângulo θ entre 1 e x.
(b) Determine a projeção vetorial $\mathbf{p}$ de 1 sobre x e verifique que $1 - \mathbf{p}$ é ortogonal a $\mathbf{p}$.
(c) Calcule $\|1 - \mathbf{p}\|$, $\|\mathbf{p}\|$, $\|1\|$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.

9. Para $C[-\pi, \pi]$ com produto interno definido por (6), mostre que cos mx e sen nx são ortogonais e que ambos são vetores unitários. Determine a distância entre os dois vetores.

10. Mostre que as funções x e x^2 são ortogonais em P_5 em relação ao produto interno definido por (5), onde $x_i = (i - 3)/2$ para $i = 1, \ldots, 5$.

11. Considere em P_5 o produto interno como no Exercício 10 e a norma definida por

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \left\{ \sum_{i=1}^{5} [p(x_i)]^2 \right\}^{1/2}$$

Calcule:
(a) $\|x\|$ (b) $\|x^2\|$ (c) a distância entre x e x^2

12. Se V é um espaço munido de um produto interno, mostre que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

satisfaz as duas primeiras propriedades na definição de norma.

13. Mostre que

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

define uma norma em R^n.

14. Mostre que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

define uma norma em R^n.

15. Calcule $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$ para cada um dos vetores a seguir pertencentes a R^3.

(a) $\mathbf{x} = (-3, 4, 0)^T$ (b) $\mathbf{x} = (-1, -1, 2)^T$ (c) $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$

16. Sejam $\mathbf{x} = (5, 2, 4)^T$ e $\mathbf{y} = (3, 3, 2)^T$. Calcule $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$. Para qual dessas normas os dois vetores estão mais próximos? Para qual eles estão mais longe?

17. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dois vetores em um espaço com produto interno. Mostre que, se $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, então a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é

$$\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right)^{1/2}$$

18. Considere R^n com o produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$$ use $\|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$

Encontre uma fórmula para a distância entre dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ e $\mathbf{y}$ $(y_1, \ldots, y_n)^T$.

19. Seja $\mathbf{x} \in R^n$. Mostre que $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2$.

20. Seja $\mathbf{x} \in R^2$. Mostre que $\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1$.

[***Sugestão:*** Escreva $\mathbf{x}$ na forma $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ e use a desigualdade triangular.]

21. Dê um exemplo de um vetor não-nulo $\mathbf{x} \in R^2$ para o qual

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_1$$

22. Mostre que, em qualquer espaço vetorial normado,

$$\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$$

23. Mostre que, quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em um espaço vetorial normado,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \ge \left| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \right|$$

24. Mostre que, quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em um espaço vetorial munido de um produto interno,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

Interprete geometricamente esse resultado para o espaço vetorial R^2.

25. O resultado do Exercício 24 não é válido para normas que não estão associadas a produtos internos. Dê um exemplo disso em R^2 para a norma $\|\cdot\|_1$.

26. Determine se as expressões a seguir definem ou não normas em $C[a, b]$.

(a) $\|f\| = |f(a)| + |f(b)|$
(b) $\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx$
(c) $\|f\| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$

27. Seja $\mathbf{x} \in R^n$. Mostre que:

(a) $\|\mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty$ (b) $\|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty$

Dê exemplos de vetores em R^n para os quais as igualdades nos itens (a) e (b) são válidas.

28. Desenhe o conjunto de pontos $(x_1, x_2) = x^T$ em R^2 para os quais:

(a) $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ (b) $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ (c) $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$

29. Considere o espaço vetorial R^n com o produto interno $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$. Mostre que, qualquer que seja a matriz A $m \times n$, temos:

(a) $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle$ (b) $\langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|A\mathbf{x}\|^2$