UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO. DE MATEMÁTICA

Lista de exercícios de PNL - Professor Luiz Carlos Matioli

1. Considere o algoritmo de barreiras e $Q(x, \rho) = f(x) + \rho B(x)$. Prove que:

   (a) $Q(x_{k+1}, \rho_{k+1}) \leq Q(x_k, \rho_k)$.

   (b) $B(x_k) \leq B(x_{k+1})$.

   (c) $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$.

2. Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \geq 1 \end{array}$$

   (a) Analise as soluções utilizando condições de otimalidade.

   (b) Analise as soluções utilizando o Algoritmo de barreira logaritmica. **Dica:** Derive a função penalizada e escreva x em função do parâmetro de penalidade. Depois execute o algoritmo, da maneira como realizamos em sala.

   (c) Avalie a Hessiana da função penalizada. Verifique que essa matriz é mal condicionada quando o parâmetro de penalidade tende a infinito.

3. Idem ao problema anterior para os seguintes problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \end{array}$$

4. (Problema proposto por Powell - com adapatações) Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \dfrac{-1}{x_1^2 + 1} \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 1 \end{array}$$

   Verifique que a função penalizada Barreira logaritmica é ilimitada por baixo. Mostre que ela tem um minimizador local que aproxima a solução $\bar{x}$ quando o parâmetro de penalidade tende a zero.

5. Para o problema a seguir

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeito a} & 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Escreva a função penalidade Barreira logartimica.

   (b) Mostre que a solução da função encontrada no item anterior é dada, em função do parâmetro de penalidade, por:

$$\left(\frac{\sqrt{1 + 2\rho} + 3\rho - 1}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 2\rho}}{2} \right)$$

6. Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & -x_1x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \end{array}$$

(a) Escreva a função penalidade quadrática.

(b) Mostre que se $\rho > \dfrac{1}{4}$ (ρ é o parâmetro de penalidade) então a solução da função penalizada é dada por $x_1 = \dfrac{8\rho}{4\rho - 1}$ e $x_2 = \dfrac{4\rho}{4\rho - 1}$.

(c) Quais conclusões pode se tirar quanto à solução no item anterior se $\rho \leq \dfrac{1}{4}$?

(d) Mostre que a Hessiana, H, da função penalizada é dada por

$$H = \begin{pmatrix} \rho & 2\rho - 1 \\ 2\rho - 1 & 4\rho \end{pmatrix}.$$

Pode se tirar alguma conclusão sobre a matriz H quando ρ cresce?

7. Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^Tx + c^Tx \\ \text{sujeito a} & x \leq 0. \end{array}$$

(a) Escreva uma função penalidade conveniente para este problema.

(b) Escreva um algoritmo de penalização combinado com o algoritmo de Newton para resolver este problema.

8. Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & e^{3x_1+4x_2} \\ \text{sujeito a} & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{array}$$

(a) Escreva a função Lagrangeano aumentado de Hestenes e Powell.

(b) Faça duas iterações do método de Newton puro (sem busca) aplicado ao subproblema gerado pelo algoritmo de Lagrangeano aumentado.

9. Considere o problema unidimensional restrito

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & -\frac{1}{2}x^2 \\ \text{sujeito a} & x = 1 \end{array}$$

(a) Determine a solução de (P) utilizando KKT.

(b) Mostre que se $\rho < 1$ com λ e ρ finitos, então a função Lagrangeano aumentado associada ao problema dado é ilimitada por baixo (Nota: λ e ρ são, respectivamente, o multiplicador de Lagrange e o parâmetro de penalidade).

(c) Mostre que se $\rho > 1$, então a função Lagrangeano aumentado, em função de x (λ e ρ fixados), é estritamente convexa.

(d) O que acontece quando $\rho = 1$?

(e) Faça 4 iterações do algoritmo de Lagrangeano aumentado aplicado a esse problema. Utilize $\lambda^0 = 0$ e $\rho^0 = 2$.