$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + - \cdots \pm a_{1,k+1}\det(M_{1,k+1})$$

Como as matrizes M_{ij} são todas $k \times k$, pela hipótese de indução temos que

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}^T) - a_{12}\det(M_{12}^T) + - \cdots \pm a_{1,k+1}\det(M_{1,k+1}^T) \tag{9}$$

A expressão do lado direito do sinal de igualdade em (9) é simplesmente a expansão em determinantes menores de $\det(A^T)$ em relação à primeira coluna de A^T. Portanto,

$$\det(A^T) = \det(A)$$ □

Teorema 2.1.3. *Se A é uma matriz triangular $n \times n$, então o determinante de A é igual ao produto dos elementos na diagonal de A.*

Demonstração. Em vista do Teorema 2.1.2, basta provar o teorema para matrizes triangulares inferiores. O resultado segue facilmente por indução em n, usando a expansão em cofatores. Os detalhes são deixados a cargo do leitor (ver Exercício 8). □

Teorema 2.1.4. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(i) *Se A tem uma linha ou coluna contendo apenas zeros, então* $\det(A) = 0$.
(ii) *Se A tem duas linhas ou duas colunas idênticas, então* $\det(A) = 0$.

Esses dois resultados podem ser provados facilmente usando-se expansão em cofatores. As demonstrações ficam a cargo do leitor (ver Exercícios 9 e 10).

Na próxima seção, vamos examinar o efeito das operações elementares sobre o determinante. Isso vai nos permitir usar o Teorema 2.1.3 para obter um método mais eficiente de calcular o valor de um determinante.

EXERCÍCIOS

1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Encontre os valores de $\det(M_{21})$, $\det(M_{22})$ e $\det(M_{23})$.
(b) Encontre os valores de A_{21}, A_{22} e A_{23}.
(c) Use as respostas em (a) e (b) para calcular $\det(A)$.

2. Use determinantes para verificar, para cada uma das matrizes a seguir, se a matriz é ou não invertível.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. Calcule cada um dos determinantes a seguir.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4. Diga o valor de cada determinante a seguir diretamente, analisando cada matriz.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5. Calcule o determinante a seguir, escrevendo sua resposta como um polinômio em x.

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

6. Encontre todos os valores de λ para os quais o determinante a seguir é igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

7. Seja A uma matriz 3×3 com $a_{11} = 0$ e $a_{21} \neq 0$. Mostre que A é equivalente por linhas a I se e somente se

$$-a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \neq 0$$

8. Escreva os detalhes da demonstração do Teorema 2.1.3.

9. Prove que se uma linha ou coluna de uma matriz A $n \times n$ tem todos os elementos iguais a zero, então $\det(A) = 0$.

10. Use indução matemática para provar que se A é uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ com duas linhas idênticas, então $\det(A) = 0$.

11. Sejam A e B matrizes 2×2.
(a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?
(b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$?
(c) $\det(AB) = \det(BA)$?
Justifique suas respostas.

12. Sejam A e B duas matrizes 2×2 e sejam

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B) + \det(C) + \det(D)$.
(b) Mostre que, se $B = EA$, então $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

13. Seja A uma matriz simétrica tridiagonal (isto é, A é simétrica e $a_{ij} = 0$ sempre que $|i - j| > 1$). Seja B a matriz obtida retirando-se as duas primeiras linhas e colunas de A. Mostre que

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}^2\det(B)$$

2 PROPRIEDADES DE DETERMINANTES

Vamos considerar, nesta seção, os efeitos das operações elementares sobre o determinante de uma matriz. Uma vez estabelecidos esses efeitos, vamos provar que uma matriz é invertível se e somente se seu determinante é nulo e vamos desenvolver um método para calcular determinantes através de operações elementares. Além disso, vamos obter um resultado importante sobre o determinante de um produto de matrizes. Vamos começar com o seguinte lema:

Lema 2.2.1. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se A_{jk} denota o cofator de a_{jk} para $k = 1, \ldots, n$, então*

Demonstração. Se B é singular, pelo Teorema 1.4.3, AB também é singular (ver Exercício 15 do Cap. 1, Seção 4), e, portanto,

$$\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$$

Se B é invertível, B pode ser escrita como um produto de matrizes elementares. Já vimos que o resultado é válido para matrizes elementares. Logo,

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(AE_kE_{k-1}\cdots E_1)\\ &= \det(A)\det(E_k)\det(E_{k-1})\cdots\det(E_1)\\ &= \det(A)\det(E_kE_{k-1}\cdots E_1)\\ &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

□

Se A é singular, então o valor calculado de $\det(A)$ usando aritmética exata tem que ser 0. No entanto, dificilmente vamos chegar a esse resultado se os cálculos forem feitos por computador. Como os computadores usam um sistema numérico finito, erros de aproximação são em geral inevitáveis. Conseqüentemente, é mais provável que o valor calculado de $\det(A)$ esteja apenas próximo de 0. Devido a erros de aproximação, é praticamente impossível determinar, utilizando um computador, se uma matriz é ou não exatamente singular. Em aplicações envolvendo computadores, muitas vezes faz mais sentido perguntar se uma matriz é "aproximadamente" singular. Em geral, o valor de $\det(A)$ não é um bom indicador de quão próxima uma matriz está de ser ou não singular. No Cap. 7 vamos discutir como determinar se uma matriz é aproximadamente singular ou não.

EXERCÍCIOS

1. Calcule cada um dos determinantes a seguir diretamente, analisando a matriz.

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Use o método de redução para calcular $\det(A)$.
(b) Use o valor de $\det(A)$ para calcular

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Para cada uma das matrizes a seguir, calcule o determinante e diga se a matriz é singular ou invertível.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

4. Escolha todos os valores possíveis de c que tornam a matriz a seguir singular.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{pmatrix}$$

5. Sejam A uma matriz $n \times n$ e α um escalar. Mostre que

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

6. Seja A uma matriz invertível. Mostre que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

7. Sejam A e B matrizes 3×3 com $\det(A) = 4$ e $\det(B) = 5$. Encontre o valor de:
(a) $\det(AB)$ (b) $\det(3A)$ (c) $\det(2AB)$ (d) $\det(A^{-1}B)$

8. Sejam E_1, E_2, E_3 matrizes elementares de tipos I, II, III, respectivamente, e seja A uma matriz 3×3 com $\det(A) = 6$. Suponha que E_2 foi obtida multiplicando-se a segunda linha de I por 3. Encontre o valor de cada um dos determinantes a seguir.
(a) $\det(E_1A)$ (b) $\det(E_2A)$ (c) $\det(E_3A)$
(d) $\det(AE_1)$ (e) $\det(E_1^2)$ (f) $\det(E_1E_2E_3)$

9. Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas e suponha que B pode ser obtida de A usando-se apenas as operações elementares I e III. Qual a relação entre os valores de $\det(A)$ e $\det(B)$? Se B puder ser obtida de A usando-se apenas operações elementares III, qual a relação entre os valores de $\det(A)$ e $\det(B)$? Justifique suas respostas.

10. Considere a matriz de Vandermonde 3×3

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

(a) Mostre que $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.
(b) Que condições os escalares x_1, x_2 e x_3 têm que satisfazer para que V seja invertível?

11. Suponha que a matriz A 3×3 fatora em um produto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Determine o valor de $\det(A)$.

12. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Prove que o produto AB é invertível se e somente se A e B são ambas invertíveis.

13. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Prove que, se $AB = I$, então $BA = I$. Qual o significado desse resultado para a definição de uma matriz invertível?

14. Seja A uma matriz invertível $n \times n$ com um cofator não-nulo A_{nn} e defina

$$c = \frac{\det(A)}{A_{nn}}$$

Mostre que, se subtrairmos c de a_{nn}, a matriz resultante será singular.

15. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ elementos de R^3 e seja $\mathbf{z}$ um vetor em R^3 cujas coordenadas são definidas por