UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios - Otimização II
Professor : Luiz Carlos Matioli

1. Considere o problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \geq 1 \end{array}$$

   (a) Resolva-o utilizando condições de otimalidade.

   (b) Resolva utlizando o método de barreira logaritmica.

   (c) Calcule a hessiana da função penalizada, utlizando a penalidade barreira logaritmica e o parâmetro de penalidade igual a $10^{-4}$. Esta matriz é mal condicionada ? Porque isso acontece ?

2. Idem ao problema anterior para o seguinte problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

   Em relação a hessiana. Existe diferença ao problema anterior e este. Em caso afirmativo, porque você acha que isso acontece ?

3. Idem ao problema 1 para o seguinte problema

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \end{array}$$

4. (Problema proposto por Powell - adptado por mim) Considere o problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \dfrac{-1}{x_1^2 + 1} \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 1 \end{array}$$

   (a) Utilizando a ferramenta que puder (matemática, computador, ...) se convença que função penalizada pela barreira logaritmica é ilimitada por baixo.

   (b) Mostre que a função penalizada por barreira logaritmica tem um minimizador local que aproxima a solução $\bar{x} = 1$ quando $r \to 0$ (aqui $r$ é o parâmetro de penalidade).

5. (barreira logaritmica ilimitada) Considere o problema unidimensional

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & log(x+1) \\ \text{sujeito a} & x \geq 0 \end{array}$$

   (a) Encontre a função penalizada por barreira logaritmica.

(b) Através da condição de otimilade para a função encontrada no item anterior, mostre que:
Se $r \geq 1$ (r é o parâmetro de penalidade) então a função penalizada não tem minimizador (na verdade é ilimitada)
se $r < 1$ a problema tem a seguinte solução (em função do parâmentro de penalidade) $x = \dfrac{r}{1-r}$. Esta solução aproxima a solução ótima $\bar{x} = 0$ quando $r$ tende a zero.

6. Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeito a} & 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Encontre a função penalizada por barreira logaritmica.

   (b) Mostre que a solução da função encontrada no item anterior é dada por:

$$\left(\frac{\sqrt{1+2r}+3r-1}{2}, \frac{1+\sqrt{1+2r}}{2}\right)^T$$

   Mostre, ainda, que se $r$ tende a zero a solução se aproxima de $(0,1)^T$.

7. Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & -x_1x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Encontre a função penalizada utilizando a penalidade quadrática.

   (b) Mostre que se $\rho > \dfrac{1}{4}$ ($\rho$ é o parâmetro de penalidade) então a solução da função penalizada é dada por $x_1 = \dfrac{8\rho}{4\rho - 1}$ e $x_2 = \dfrac{4\rho}{4\rho - 1}$

   (c) O que pode se afirmar quanto à solução do item anterior se $\rho \leq \dfrac{1}{4}$ ?

   (d) Mostre que a hessiana da função penalizada, encontrada no item (a), é dada por

$$\begin{pmatrix} \rho & 2\rho - 1 \\ 2\rho - 1 & 4\rho \end{pmatrix}$$

   O que pode ser afirmado quanto à condição desta matriz quando $\rho$ cresce ?

8. Considere o problema

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & c^T x + \frac{1}{2} x^T x \\ \text{sujeito a} & x \leq 0 \end{array}$$

   (a) Se $x \in I\!R^2$ e $c = [1, -1]$ encontre a solução utlizando KKT.

   (b) Idem ao item anterior para $c \in I\!R^2$ qualquer (neste caso, a solução fica em função de c).

   (c) se $x \in I\!R^n$ e $c$ é constante em $I\!R^n$ determine a solução, em função da constante $c$.

   (d) Escreva uma função penalidade conveniente para este problema.

   (e) Escreva um algoritmo de penalização combinado com o algoritmo de Newton para resolver este problema.